

**Постапокалиптические**

1. Докажите, что  $n^3 - n$  делится на 24 при любом нечетном  $n$ .

*Подсказка: Докажите, что указанное число делится и на 3, и на 8.*

2. Алфавит племени Мумбо-Юмбо состоит из трех букв А, Б и В. Словом является любая последовательность, состоящая не более, чем из 4 букв. Сколько слов в языке племени Мумбо-Юмбо?

3. Сколькими способами можно расставить на первой горизонтали шахматной доски комплект белых фигур (король, ферзь, две ладьи, два слона и два коня)?

4. Каждая из девочек после отбоя не более двух раз поболтала по телефону. Докажите, что их можно разбить на три группы так, чтобы в каждой группе не было болтавших девочек.

5. Прямая раскрашена в два цвета. Докажите, что найдется отрезок ненулевой длины, середина и концы которого окрашены в один цвет.

6. Каких 7-значных чисел больше: тех, в записи которых есть 1, или остальных?

7.  $a, b, c$  — натуральные числа, причем  $a + b + c$  делится на 24. Докажите, что  $a^3 + b^3 + c^3$  тоже делится на 24.

8.  $a$  и  $b$  — натуральные числа, причем число  $a^2 + b^2$  делится на 21. Докажите, что оно делится и на 441.

9. В некоторой стране любые два города соединены либо железной дорогой, либо авиалинией. Докажите, что одним из этих двух видов транспорта можно добраться из любого города в любой другой, сделав не более двух пересадок.

10. а)  $p, p + 10, p + 14$  — простые числа. Найдите  $p$ . б)  $p, 2p + 1, 4p + 1$  — простые числа. Найдите  $p$ .