Знакомство

1.1. В двух кабентах ВМШ занимаются 70 человек. Известно, что 7/17 учеников кабинета №18 опоздали на 17 минут, а 2/9 учеников кабинета №40 пришли без сменки. Сколько человек занимаются в 18 кабинете?

1.2. Может ли так быть, чтобы суммарные доходы компании за любые a) три; b) пять подряд идущих месяцев 2013 года превышали расходы, но расходы за весь год превышали доходы?

1.3. Существуют ли 3 натуральных числа, попарные суммы которых равны a) 1542, 1543, 1544; b) 2011, 2012, 2013?

1.4. Докажите, что из 2012 полосок бумаги шириной 1 и длинами 1, 2, ..., 2012 можно составить прямоугольник, длина и ширина которого больше 1. Какова площадь этого прямоугольника?

1.5. На складе ООО «Петя, Вася и партнёры» есть сувениры десяти разных видов. Однажды щедрый Петя решил сосчитать, сколько он сможет подарить разных подарков из 7 различных сувениров, а прижимистый Вася решил сосчитать, сколько он сможет подарить разных подарков из 3 различных сувениров. У кого из них получилось больше вариантов?

1.6. Умная девочка Маша взяла трехначное число и написала его дважды. Докажите, что полученное число делится на 7.

1.7. Найдите, пожалуйста, сумму натуральных чисел от 1 до 1543.

1.8. Клетки квадрата 11×11 покрашены в белый цвет. Разрешается выбрать любые четыре белые клетки, расположенные в вершинах квадрата со сторонами, параллельными сторонам доски, и две из этих клеток, расположенных по диагонали, перекрасить в черный цвет. Какое наибольшее количество черных клеток удастся получить при помощи таких операций?

1.9. Список заданий викторины состоял из 33 вопросов. За каждый правильный ответ ученик получал 7 очков, за неправильный ответ с него списывали 12 очков, а при отсутствии ответа давали 0 очков. Сколько верных ответов дал ученик, набравший 77 очков, если известно, что по крайней мере один раз он ошибся?

Счастливые суммы

2.1. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} x + y &= 1542 \\ y + z &= 1543 \\ x + z &= 1544. \end{cases}$$

2.2. Из пятизначного числа вычли число, записанное теми же цифрами в обратном порядке. Докажите, что получившееся число делится на 11.

2.3. Гриша спешил на свидание. В тумбочке он нашел 7 синих, 5 красных и 3 зеленых носка (все носки разные). a) Каким числом способов он может взять себе два носка разных цветов? b) А каким числом способов он может взять себе два носка одного цвета?

2.4. Можно ли вписать в клетки доски 8×8 различные числа от 1 до 64, так, чтобы в любом квадратике 2×2 сумма записанных чисел была равна 120?

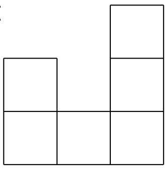
2.5. Найдите, пожалуйста, сумма **нечетных** чисел от 1 до $2n-1$. (Ответ выразите в зависимости от n.)

2.6. Может ли степень двойки оканчиваться четырьмя одинаковыми цифрами?

2.7. Билеты нумеруются от 000000 до 999999. Билет называется счастливым, если сумма первых трех цифр равна сумме последних трех цифр. Докажите, что сумма номеров всех счастливых билетов делится на 1001.

2.8. a) На доске 10 на 10 выписаны все числа от 0 до 99 следующим образом: в первой строке слева направо 0, 1, ..., 9, во второй: 10, 11, ..., 19, ..., в десятой: 90, 91, ..., 99. Петя выбрал 10 клеток так, что в каждой строке и в каждом столбце выбрана ровно 1 клетка. Чему может равняться сумма чисел на выбранных Петей клетках? b) Та же задача, но для доски 19 на 19 и чисел от 0 до 360.

2.9. Сложите из нескольких фигур следующего вида квадрат:



По остаточному принципу

3.1. Найдите остаток от деления:
a) $1989 + 2010 + 14264$ на 4;
b) $1989 \cdot 1990 \cdot 1991$ на 7;
c) 9^{100} на 8;
d) 2^{2010} на 5.

3.2. a) Докажите, что из любых 11 чисел можно выбрать два, разность между которыми делится на 10. b) Докажите, что из любых 20 чисел можно выбрать два, разность между которыми делится на 19.

3.3. Леонид Андреевич утверждает, что если к любому двухзначному числу приписать справа число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке, то получим четырехзначное число, делящееся на 11 без остатка. Докажите, что ваш преподаватель прав.

3.4. Докажите, что $n^5 + 4n$ делится на 5 при любом натуральном n.

3.5. Докажите, что $n^2 + 1$ не делится на 3 ни при каком натуральном n.

3.6. В прямоугольной таблице 8 столбцов, сумма в каждом столбце — по 10, а в каждой строке — по 20. Сколько в таблице строк?

3.7. Общая масса нескольких ящиков равна 9 т 880 кг, причем масса каждого из них не превышает тонны. Какое наименьшее количество машин грузоподъемностью три тонны нужно, чтобы заведомо перевести весь этот груз?

3.8. Дана таблица, состоящая из десяти строк и шестнадцати столбцов. В каждом столбце стоят 3 фишки. Докажите, что найдутся четыре фишки, стоящие на пересечении двух строк и двух столбцов.

Остатки

Идея! Если разность двух чисел делится на m, то они дают одинаковые остатки при делении на m. И наоборот: если числа дают одинаковые остатки при делении на m, то их разность делится на m.

4.1. Докажите, что $n^3 + 2n$ делится на 3 при любом натуральном n.

4.2. a) Докажите, что если из числа вычесть число образованное двумя его последними цифрами, то получится число кратное 4. b) Докажите, что если из числа вычесть число образованное четырмя его последними цифрами, то получится число кратное 16.

4.3. Докажите, что четырехзначное число и сумма его цифр дают одинаковые остатки при делении a) на 3; b) на 9.

4.4. Вычислите остаток при делении
a) $88 \cdot 35 \cdot 43 + 74 \cdot 71$ на 3
b) 3^{100} на 7;
c) $4 + \ldots + 1543$ на 19.
d) $2^{14} + 2^{15} + 2^{16} + 2^{17}$.

4.5. Найдите все натуральные n, для которых все числа $3n - 4$, $4n - 5$ и $5n - 3$ являются простыми.

4.6. Прямоугольник, у которого одна из сторон втрое длиннее другой, разрезали на одинаковые квадратики. Оказалось, что сумма их периметров в 6 раз больше периметра исходного прямоугольника. Сколько могло получиться квадратиков?

4.7. Точка C — середина AB. Через A и B проходят прямые, перпендикулярные AB. Прямая l, проходящая через C, пересекает их в точках X и Y. Докажите, что $CX = CY$.

Принцип Дирихле

5.1. Найдите остаток от деления 10^{100} при делении на 7.

5.2. В Москве живет уже больше чем 10,1 млн. жителей. У каждого на голове не более 100 тысяч волос. Докажите, что имеется хотя бы 100 жителей Москвы с одинаковым количеством волос на голове.

5.3. К празднику зал украсили 50 воздушными шариками. Докажите, что среди них найдутся либо 8 одноцветных, либо 8 шариков разных цветов.

5.4. Ученик должен был разделить число на 2, а к результату прибавить 3, а он, по ошибке, умножил число на 2, а от полученного произведения отнял 3. Ответ все равно получился правильный. Какой?

5.5. Докажите, что из любых 7 чисел можно выбрать два, сумма или разность которых делится на 10. b) Докажите, что из любых 11 чисел можно выбрать два сумма или разность которых делится на 19.

5.6. Изначально на доске написано 1. К числу прибавляют сумму его цифр, после этого старое число стирают и записывают новое. Докажите, что мы никогда не получим число вида $99\ldots9$.

5.7. Треугольники ABC и ADC таковы, что отрезки BC и AD пересекаются в точке O. Также известно, что $BO = OC$, $AO = OD$. Чему равен угол $\angle ACD$, если $\angle ABC = 71°$ и $\angle BCA = 36°$?

Задачи на каникулы

f.1. Докажите, что $n^3 + 2$ не делится на 9 ни при каком натуральном n.

f.2. Вычислите остаток при делении
a) $1989 \cdot 1990 \cdot 1991 + 1992^3$ на 7;
b) 354169888123 на 9;
c) 354169888123 на 4;
d) $1543 + \ldots + 2012$ на 19.

f.3. Найдите значение дроби $\frac{G \cdot R \cdot U \cdot Z \cdot I \cdot A}{T \cdot B \cdot I \cdot L \cdot I \cdot S \cdot I}$, где разные буквы — это разные цифры, а между буквами стоит знак умножения.

f.4. Докажите, что число $\overline{ababab}$ делится на 37.

f.5. В магазине "Все для чая" продается 5 чашек, 3 блюдца и 4 чайные ложки. Сколькими способами можно купить два предмета с разными названиями?

f.6. Сумма цифр трехзначного числа равна 7. Докажите, что оно делится на 7 тогда и только тогда, когда равны его цифры десятков и единиц.

f.7. Назовем натуральное число *симпатичным*, если в его записи встречаются только нечетные цифры. Сколько существует 4-значных "симпатичных" чисел?

f.8. Можно ли в клетках прямоугольной таблицы 15×43 расставить числа так, чтобы сумма чисел в каждой строке равнялась 239, а в каждом столбце — 146 ?

f.9. В футбольной команде (11 человек) нужно выбрать капитана и его заместителя. Сколькими способами это можно сделать?

f.10. На доске написаны числа 0, 1, 0, 0. За один шаг разрешается прибавлять единицу к любым двум из них. Можно ли, повторяя эту операцию, добиться, чтобы все числа стали равными?

f.11. Может ли быть квадратом число, составленное из 30-ти единиц и сколько угодно нулей?

f.12. Может ли случиться, что в компании из 11 девочек и 10 мальчиков все девочки знакомы с разным числом мальчиков, а все мальчики — с одним и тем же числом девочек? А если девочек 10, а мальчиков 9?

f.13. Некоторые множества простых чисел, такое как 7, 83, 421, 659, используют в десятичной записи каждую ненулевую цифру ровно 1 раз. Какая наименьшая сумма чисел в таком множестве может быть?

Комбинаторика и числа

6.1. В гардеробе у принцессы 5 различных платьев и 6 пар туфелек. За год во дворце происходит 100 балов. Докажите, что будет три бала, на которых принцесса будет одета одинаково.

6.2. На доске написано число, записанное одними 9 и 0. Каждую минуту число на доске стирают и вместо него записывают сумму его цифр. Так продолжается, пока на доске не останется однозначное число. Какое?

6.3. a) Сколько существует 6-значных чисел, в записи которых ни разу не встречается цифра 4? b) Сколько существует 9-значных чисел, в записи которых есть хотя бы одна четверка?

6.4. Имеется 8 полотен различных цветов. Сколькими способами можно сшить из них флаг, состоящий из 8 различных горизонтальных полос?

6.5. 16 мальчиков пошли в лес за грибами. Всего они набрали 100 грибов. Докажите, что какие-то два мальчика набрали одинаковое количество грибов.

6.6. Двое играют в игру в квадрате 8×8. Первый может своим ходом закрасить любую клетку квадрата. А второй может своим ходом любой уголок из трех клеток. Кто не может сделать ход — проиграл. Кто выигрывает при правильной игре?

Комбинаторика и слова

Упражнение. Вычислите $10!/(7!\cdot 3!)$.

7.1. Ксения Юрьевна посчитала, сколько существует 6-значных чисел, все цифры которых имеют одинаковую четность. Докажите, что вы тоже можете это сделать — посчитайте!

7.2. Сколькими способами можно поставить на шахматную доску две (одинаковые) ладьи так, чтобы они не били друг друга?

7.3. Сколько слов можно получить, переставляя буквы в слове a) “ПЛОХО”; b) “ХОРОШО”? (Словом называется произвольная последовательность букв.)

7.4. Известно, что $\frac{a+b}{a-b}=3$. Какие значения может принимать выражение $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$? (Как обычно, нужно найти все варианты и показать, что других нет.)

7.5. На доске написано число 53. Каждую минуту его возводят в 1000 степень, последние две цифры получившегося числа записывают на доске, а старое число стирают. Докажите, что рано или поздно числа начнут повторятся по циклу.

7.6. Неизвестный спонсор называет три цифры (не обязательно различных) и обещает шоколадку тому семикласснику, который составит из них одно-, двух- или трехзначное число, кратное трем. Всегда ли такое найдется?

7.7. На квадратной площади со стороной 1 км стоит 51 памятник И.П.Г.Л. Дирихле. Докажите, что какие-то три памятника помещаются на квадратном участке со стороной 200 м.

Опять комбинаторика

8.1. Сколько слов можно получить, переставляя буквы в слове a) “МАМА”; b) “МАТЕМАТИКА”? (Словом называется произвольная последовательность букв.)

8.2. Десять друзей гномов встречаются по двое и выпивают на двоих одну бутылку кефира. Этой осенью первый гном пил один раз, второй гном пил два раза и.т.д. десятый гном пил десять раз. Сколько бутылок они распили?

8.3. У Саши в холодильнике есть апельсин, банан, груша, киви, мандарин и 3 одинаковых яблока. Каждый день Саша берёт с собой в школу 1 фрукт. Сколько способов у Саши распределить фрукты на 8 учебных дней

8.4. Решая числовой ребус ДВА + ТРИ = ПЯТЬ, Вася получил 177 возможных ответов. Докажите, что Вася нашел не все решения ребуса (Как обычно в ребусах разные буквы обозначают разные цифры, одинаковые буквы обозначают одинаковые цифры).

8.5. а) Можно ли разбить квадрат на 8 прямоугольников так, чтобы каждый граничил ровно с 4 другими? б) Тоже самое, но прямоугольники должны быть равной площади.

8.6. В каждую клетку квадрата 3×3 записано целое число. При этом сумма чисел в каждой строке кроме первой на 1 больше, чем в предыдущей, и сумма чисел в каждом столбце кроме первого в 4 раза больше, чем в предыдущем. Докажите, что сумма чисел во второй строке делится на 7.

Комбинаторика и разнобой

9.1. В алфавите племени Бум-Бум шесть букв. Словом является любая последовательность из шести букв, в которой есть хотя бы две одинаковые буквы. Сколько слов в языке племени Бум-Бум?

9.2. Несколько друзей гномов встречаются по двое и выпивают на двоих одну бутылку кефира. Докажите, что гномов, которые пили нечетное количество раз всегда четное количество.

9.3. В стране некоторые города соединены дорогами. Из каждого города выходит по 5 дорог. Могло ли всего в стране быть 99 дорог?

9.4. Для натуральных x, y, z известно, что $x^2 + y^2 = z^2$. Докажите, что хотя бы одно из них делится на 3. Указание: что-то мы похожее когда-то делали, только вот что?

9.5. Сколькими способами можно расставить 4 ладьи на шахматной доске так, чтобы каждая била ровно две?

9.6. Целые числа a, b, c и d таковы, что $\frac{a-b}{c-d} = \frac{a+b}{c+d}$, и $ad = 60$. Найдите произведение всех четырех чисел.

9.7. Делится ли на 3 количество решений уравнения $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{100}$?(*У уравнения* $x+2y+2z = 3$ *решение* $x = 1, y = 1, z = 0$ *и решение* $x = 1, y = 0, z = 1$ *считаются разными.*)

Феодалы

10.0. Между 9 планетами Солнечной системы введено космическое сообщение. Ракеты летают по следующим двусторонним маршрутам:
Земля–Меркурий, Плутон–Венера, Земля–Плутон, Плутон–Меркурий, Меркурий–Венера, Уран–Нептун, Нептун–Сатурн, Сатурн–Юпитер, Юпитер–Марс, Марс–Уран.
Можно ли добраться с Земли до Марса?

10.1. В стране Семерка 15 городов, каждый из которых соединен дорогами не менее, чем с 7 другими. Докажите, что из любого города можно добраться до любого другого (возможно, проезжая через другие города).

10.2. 8 шахматистов играют в однокруговой турнир по шашкам. Вечером одного из дней соревнований, попивая чай, каждый из них назвал сколько он сыграл партий на данный момент. Могли ли у них получится наборы: a) 9, 8, 8, 7, 6, 5, 5, 4; b) 7, 7, 6, 5, 4, 2, 2, 1; c) 5, 5, 4, 4, 2, 2, 2, 2; d) 6, 6, 6, 5, 5, 3, 2, 2?

10.3. В психиатрической больнице есть главный врач и много сумасшедших. В течение недели каждый сумасшедший один раз в день кусал кого-нибудь (возможно и себя). В конце недели оказалось, что у каждого из больных по два укуса, а у главного врача — сто укусов. Сколько сумасшедших в больнице?

10.4. Для натуральных x, y, z известно, что $x^2 + y^2 = z^2$. Докажите, что хотя бы одно из них делится на 5.

10.5. Пусть a и b некоторые положительные действительные числа, причём $a > b$. Какая из дробей — a/b или b/a — меньше отличается от числа 1?

10.6. Можно ли нарисовать на плоскости 9 отрезков так, чтобы каждый пересекался ровно с тремя другими?

10.7. Сколько существует способов выпилить из шахматной доски прямоугольник, идущим по границам клеточек? (Можно вырезать из середины.)

Предновогодняя

11.1. В новогоднюю ночь Дед Мороз поставил на подоконнике в ряд (слева направо) крокус, фикус и кактус. Каждое утро Ваня, вытирая пыль, меняет местами цветок справа и цветок в центре. Днем Таня, поливая цветы, меняет местами тот, что в центре, с тем, что слева. В каком порядке будут стоять цветы через 365 дней в следующую новогоднюю ночь?

11.2. Доска имеет форму креста, который получается, если из квадратной доски 4×4 выкинуть угловые клетки. Можно ли обойти ее ходом шахматного коня и вернуться на исходное поле, побывав на всех полях ровно по разу?

11.3. Несколько шахматистов играют в однокруговой турнир по шашкам. Вечером одного из дней соревнований, попивая чай, каждый из них назвал сколько он сыграл партий на данный момент. Докажите, что какие-то два шахматиста назвали одно и то же число.

11.4. У каждого пациента спецлечебницы №239 ровно один друг и ровно один враг. Докажите, что их можно разделить на две нейтральные палаты. (То есть так, чтобы у каждого пациента в палате не было ни друзей, ни врагов.)

11.5. У Коли и Юры были одинаковые прямоугольные открытки с одной стороной 12 см. Коля разрезал открытку на две равные прямоугольные половинки, одну половинку выкинул, другу снова разрезал на две равные прямоугольные половинки и одну половинку выкинул. Юра разрезал свою открытку на две равные прямоугольные половинки, и одну половинку выкинул. Выяснилось, что оставшиеся у Коли и Юры прямоугольники имеют одинаковый периметр. Чему могла быть равна другая сторона открытки?

11.6. В мешочек с подарками Снегурочка положила 9 мешочков поменьше. В каждый из вложенных мешкочков либо положили 9 еще поменьше, либо ничего не положили. В каждый из меньших опять положили или 9, или ни одного, и т.д. После этого оказался ровно 251 мешочек с содержимым. А сколько пустых?

11.7. Для натуральных x, y, z известно, что $x^2 + y^2 = z^2$. Докажите, что хотя бы одно из них делится на 4.

Постапокалиптические

w.1. Докажите, что $n^3 - n$ делится на 24 при любом нечетном n.

Подсказка: Докажите, что указанное число делится и на 3, и на 8.

w.2. Алфавит племени Мумбо-Юмбо состоит из трех букв А, Б и В. Словом является любая последовательность, состоящая не более, чем из 4 букв. Сколько слов в языке племени Мумбо-Юмбо?

w.3. Сколькими способами можно расставить на первой горизонтали шахматной доски комплект белых фигур (король, ферзь, две ладьи, два слона и два коня)?

w.4. Каждая из девочек после отбоя не более двух раз поболтала по телефону. Докажите, что их можно разбить на три группы так, чтобы в каждой группе не было болтавших девочек.

w.5. Прямая раскрашена в два цвета. Докажите, что найдется отрезок ненулевой длины, середина и концы которого окрашены в один цвет.

w.6. Каких 7-значных чисел больше: тех, в записи которых есть 1, или остальных?

w.7. a, b, c — натуральные числа, причем $a + b + c$ делится на 24. Докажите, что $a^3 + b^3 + c^3$ тоже делится на 24.

w.8. a и b — натуральные числа, причем число $a^2 + b^2$ делится на 21. Докажите, что оно делится и на 441.

w.9. В некоторой стране любые два города соединены либо железной дорогой, либо авиалинией. Докажите, что одним из этих двух видов транспорта можно добраться из любого города в любой другой, сделав не более двух пересадок.

w.10. a) p, $p + 10$, $p + 14$ — простые числа. Найдите p. b) p, $2p + 1$, $4p + 1$ — простые числа. Найдите p.

Вспомнить все!

12.1. В строю 100 солдат. По команде солдаты рассчитываются на первый-второй, и из строя выходят "первые". Затем оставшиеся снова рассчитываются на первый-второй и по команде из строя выходят "первые" и т. д. до тех пор, пока не останется один солдат. Сколько команд было подано? Какой солдат останется (назовите его номер в первоначальном строю)?

12.2. На каждой из двух половинок "мушкетерского" домино могут быть нарисованы один из трех мушкетеров, Д'Артаньян, король, королева, кардинал, одна из двенадцати (различных между собой) алмазных подвесок. Сколько всего доминошек в этой игре?

12.3. Сева нарисовал 6 точек, некоторые из которых соединил отрезками. После этого он спрятал рисунок в чемодан, чемодан закрыл на ключ, а ключ проглотил. В ответ на это Наташа заслала в его чемодан разведывательного таракана, который сообщил, что из пяти точек выходит соответственно 5, 5, 4, 3, 2 отрезка. Сколько отрезков выходит из шестой точки?

12.4. Настя переставила цифры в некотором натуральном числе, и от этого оно уменьшилось ровно в три раза. Докажите, что Настино число делилось a) на 9; b) на 27.

12.5. Числа 1, 2, 3, …, 7 разбили на две группы. Докажите, что произведение чисел в одной из групп меньше 72.

12.6. На какую цифру оканчивается число $2 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot \ldots \cdot 2^{50}$?

12.7. Натуральное число n равно произведению двух простых чисел. Каждое из этих простых чисел увеличили на 1. Произведение полученных чисел на 100 больше, чем число n. Чему может быть равно число n?

Тринадцатая!

13.1. Можно ли натуральные числа от 1 до 99 выписать в строчку так, чтобы любые два соседних отличались хотя бы на 50?

13.2. В стране Дюжина из города Чертова выходит ровно 13 дорог, из города Дальний — всего 1 дорога, а из всех остальных — по 12 дорог. Докажите, что из города Чертова можно добраться до города Дальний.

13.3. **Нечетные** числа от 1 до 169 разбили на 13 групп. Докажите, что сумма чисел в какой-то из них не превосходит 555.

13.4. a) Хромой король (король не может ходить по диагоналям) обошел несколько клеток шахматной доски и вернулся на прежнее поле. Докажите, что количество ходов, сделанных королем, четно.
b) Можно ли обойти хромым королём все клетки шахматной доски, начав в левом нижнем углу и закончив в правом верхнем углу?

13.5. В группе людей каждый имеет знакомого. Докажите, что эту группу можно разбить на две так, чтобы каждый человек имел знакомого из другой группы.

13.6. На плоскости провели n прямых общего положения (никакие две не параллельны, никакие три не проходят через одну точку). Найдите, пожалуйста, количество образовавшихся точек пересечения.

13.7. Найдите все такие пары натуральных чисел x и y, что выполнено равенство a) $x^2 - y^2 = 97$; b) $x^2 = y^2 + 91$.

С квадратами

14.1. Магическим квадратом называется квадрат, в котором суммы чисел в каждом столбце и в каждой строке равны между собой. Можно ли составить магический квадрат из первых 64 простых чисел?

14.2. Петя задумал натуральное число. После этого вычел из него сумму его цифр. Из полученного числа Петя вновь вычел сумму цифр (нового числа). После девятого такого действия у Пети впервые получилось число ноль. Какое число Петя задумал изначально?

14.3. На каждой клетке квадратной доски со стороной 5 сидит жук. В некоторый момент все жуки взлетают и каждый приземляется на соседнюю по стороне клетку этой доски. Докажите, что какие-то два жука окажутся на одной клетке.

14.4. Хулиган Вася вырезал из шахматной доски

a) левую нижнюю и левую верхнюю угловые клетки;

b) левую верхнюю и правую нижнюю угловые клетки.

Сможет ли он оставшуюся часть доски разрезать на прямоугольнички 1×2? (В дальнейшем такие прямоугольнички мы будем называть "доминошками".)

14.5. К простому числу прибавили 400 и получили полный квадрат. Найдите это простое число.

14.6. Найдите все такие целые числа x и y, что a) $x^2+y^2=99$; b*) $x^2+y^2=9999$.

14.7. В вершинах куба расставлены цифры 1, 2, …, 8. Докажите, что есть ребро, цифры на концах которого отличаются не менее, чем на 3.

Пять на пять? Двадцать пять!

15.1. a) Докажите, что числа от 1 до 16 можно записать в строку так, чтобы сумма любых двух соседних чисел была квадратом натурального числа. b) Докажите, что числа от 1 до 16 нельзя записать по кругу так, чтобы сумма любых двух соседних чисел была квадратом натурального числа.

15.2. Из доски a) 5×5; b) 11×11 вырезали угловую клетку. Можно ли оставшуюся часть разрезать на прямоугольники 1×3?

15.3. На доске по кругу написанно несколько чисел так, что каждое равно полусумме двух соседних с ним. Докажите, что все числа равны.

15.4. Для игры в классики на земле нарисован ряд клеток, в которые вписаны по порядку числа от 1 до 10 (см. рис). Маша прыгнула снаружи в клетку 1, затем попрыгала по остальным клеткам (каждый прыжок — на соседнюю по стороне клетку) и выпрыгнула наружу из клетки 10. Известно, что на клетке 1 Маша была 1 раз, на клетке 2 — 2 раза, …, на клетке 9 — 9 раз. Сколько раз побывала Маша на клетке 10?

1	4	5	8	9
2	3	6	7	10

15.5. На каждой клетке доски 5×5 сидит жук. В некоторый момент все жуки взлетают и каждый приземляется на соседнюю по **вертикали** клетку этой доски. После этого посчитали количество свободных клеток. Какое наименьшее число могло получиться?

15.6. Докажите, что сумма квадратов двух нечетных чисел не может быть квадратом натурального числа.

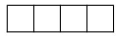
15.7. Можно ли в квадрате 5×5 закрасить 15 клеток так, чтобы у каждой закрашенной клетки было нечетное число закрашенных соседей?

На старые идеи и еще немного

16.1. Сколько существует натуральных чисел, у которых самый большой делитель (не считая самого числа) равен 47?

16.2. Докажите, что числа a) 8999999; b) 100020001; c) 1003003001 составные.

16.3. На каждой клетке доски 5×5 сидит жук. В некоторый момент все жуки взлетают и каждый приземляется на соседнюю по **диагонали** клетку этой доски. Докажите, что хотя бы 5 клеток доски окажутся свободными.

16.4. Можно ли квадрат 10×10 разрезать на фигурки вида ?

16.5. Можно ли на доске 15×15 расставить a) 43; b) 44 ладьи так, чтобы каждая била ровно 3 другие?

16.6. В классе 27 человек. Каждый мальчик дружит с 4 девочками, а каждая девочка с 5 мальчиками. Сколько в классе мальчиков и сколько девочек?

16.7. Продавец разложил гирьки массами 1, 2, 3, …,100 грамм в произвольном порядке $m_1, m_2, \ldots, m_{100}$. Докажите, что гирьки массами $|m_1 - 1|, |m_2 - 2|, \ldots, |m_{100} - 100|$, можно расположить на двух чашках весов так, что весы окажутся в равновесии.

Деревенские мотивы или Мы вернулись!

17.1. Фигура "верблюд" ходит по доске 10×10 ходом типа (1, 3) (то есть, она сдвигается сначала на соседнее поле, а затем сдвигается еще на три поля в перпендикулярном направлении; конь, например, ходит ходом типа (1, 2)). Можно ли пройти ходом "верблюда" с какого-то исходного поля на соседнее с ним?

17.2. На конференцию приехали 100 учёных из четырёх стран. Оказалось, что среди любых 13 участников есть, по крайней мере, двое одного возраста. Докажите, что или из какой-то страны приехали двое участников одного возраста и одного пола.

17.3. В кафе "Подсолнух" есть палочки только простых длин, но зато всех: 2 см, 3 см, 5 см, 7 см, и т.д. Какое наименьшее число палочек разных длин надо купить, чтобы, сложить из них контур прямоугольника?

17.4. Злобный Леонид Андреевич (он носит маску!) задумал четыре неотрицательных числа, а потом сообщил доброму Леониду Андреевичу (он маску не носит) всевозможные попарные суммы этих чисел (всего 6 штук). Помогите доброму Леониду Андреевичу восстановить изначальные числа, если эти суммы — 1, 2, 3, 4, 5, 6?

17.5. По старому закону в деревне Вишкиль растояния между домами попарно различны. Каждый житель наблюдает за своим ближайшим соседом. Докажите, что какие-то два жителя деревни Вишкиль наблюдают друг за другом.

17.6. Найдите наименьшее возможное количество жителей деревни Вишкиль, если женщин среди них меньше 50%, но больше 40%.

17.7. На аллее вдоль улицы Главная деревни Вишкиль посажены a) 10; b) 11 деревьев — тополи и березы. К каждому дереву прибита табличка, на которой указано количество берез среди следующих деревьев: дерева, на котором висит табличка, и его соседей. Можно ли по числам на табличках определить, какие из деревьев — березы?

Последняя

18.1. В турнире по волейболу, прошедшем в один круг, 20 процентов всех команд не выиграли ни одной игры. Сколько было команд? (В волейболе не бывает ничьих.)

18.2. (Маньяк-паралитик) Тюрьма имеет вид квадрата 4×4, разбитого на камеры-одиночки — единичные квадратики. Все внутренние стенки камер — двери. В камере, находящейся в левом нижнем углу, находится маньяк-паралитик, который при виде живого человека немедленно набрасывается на него, убивает его и убегает, однако немедленно впадает в парализованное состояние, если оказывается в одном помещении с мертвым. Выход из тюрьмы ровно один — из правой верхней камеры. Однажды в распоряжении маньяка оказался ключ, открывающий любую дверь, в том числе и наружную дверь тюрьмы. В результате наутро в 15 камерах были обнаружены трупы заключенных, а маньяк сбежал. Как это ему удалось?

18.3. По кругу стоят очень много вагонов, сцепленных между собой, в которых написано все, что только может быть написано. Вы находитесь в одном из них, выйти из вагонов вы не можете, у вас есть мел и тряпка. Можете ли вы посчитать количество вагонов?

18.4. Фигура на рисунке составлена из квадратов. Найдите сторону левого верхнего квадрата, если сторона самого маленького квадрата равна 1.