

Тринадцатая!

12.4. Настя переставила цифры в некотором натуральном числе, и от этого оно уменьшилось ровно в три раза. Докажите, что Настино число делилось а) на 9; б) на 27.

1. Можно ли натуральные числа от 1 до 99 выписать в строчку так, чтобы любые два соседних отличались хотя бы на 50?

2. В стране Дюжина из города Чертова выходит ровно 13 дорог, из города Дальний — всего 1 дорога, а из всех остальных — по 12 дорог. Докажите, что из города Чертова можно добраться до города Дальний.

3. Нечетные числа от 1 до 169 разбили на 13 групп. Докажите, что сумма чисел в какой-то из них не превосходит 555.

4. а) Хромой король (король не может ходить по диагоналям) обошел несколько клеток шахматной доски и вернулся на прежнее поле. Докажите, что количество ходов, сделанных королем, четно.

б) Можно ли обойти хромым королём все клетки шахматной доски, начав в левом нижнем углу и закончив в правом верхнем углу?

5. В группе людей каждый имеет знакомого. Докажите, что эту группу можно разбить на две так, чтобы каждый человек имел знакомого из другой группы.

6. На плоскости провели n прямых общего положения (никакие две не параллельны, никакие три не проходят через одну точку). Найдите, пожалуйста, количество образовавшихся точек пересечения.

7. Найдите все такие пары натуральных чисел x и y , что выполнено равенство
а) $x^2 - y^2 = 97$; б) $x^2 = y^2 + 91$.