

Роковая серия

1. Девочка Настя сошла с ума от математики, сделала игральный икосаэдр и стала его подкидывать. Какова вероятность, что за 2 последовательных броска сумма выпавших очков будет от 11 до 30 включительно?

2. В жезле n полосок, каждую из которых можно покрасить в черный или белый цвет. Если одна раскраска получается из другой переверотом жезла, то они считаются одинаковыми. Сколько существует различных жезлов?

3. Найдите остаток $6^{83} + 8^{83}$ при делении на 49.

4. Дана бесконечная последовательность цифр. Докажите, что для любого натурального числа n , взаимно простого с числом 10, можно указать такую группу стоящих подряд цифр последовательности, что записываемое этими цифрами число делится на n .

5. В некоторых деревнях России существовало когда-то следующее гадание:

Девушка зажимала в руке шесть травинок так, чтобы концы травинок торчали сверху и снизу; подруга связывала эти травинки попарно между собой сверху и снизу в отдельности. Если при этом все шесть травинок оказывались связанными в одно кольцо, то это означало, что девушка в текущем году выйдет замуж.

Какова вероятность того, что травинки при завязывании наудачу образуют кольцо?

6. Дана последовательность x_1, x_2, \dots , заданная следующим образом: $x_1 = 1$, а при $k \geq 2$ каждый член x_k на k больше суммы всех предыдущих членов. Найдите сумму первых 100 членов последовательности.

7. Вспомните разбор задачи 20.1b и попробуйте доказать **теорему Чевы** :

На сторонах BC , CA и AB треугольника взяты точки A_1 , B_1 и C_1 соответственно.

а) Если чевианы AA_1 , BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке, то

$$\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = 1. \quad (1)$$

б) Если выполнено (1), то чевианы AA_1 , BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.

Замечание. Полная формулировка теоремы Чевы звучит так:

На прямых BC , CA и AB треугольника взяты точки A_1 , B_1 и C_1 соответственно, причем нечетное число (три или одна) из них лежат на сторонах, а остальные – на продолжениях сторон. Тогда прямые AA_1 , BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке или параллельны тогда и только тогда, когда

$$\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = 1.$$

с) Вписанная окружность треугольника ABC касается сторон BC , CA и AB в точках A_1 , B_1 и C_1 соответственно. Докажите, что отрезки AA_1 , BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке, называемой **точкой Жергона**.