Осевая и центральная симметрия

Осевая симметрия.

Определение. *Точки A и B называются **симметричными относительно прямой** l, если прямая l является серединным перпендикуляром к отрезку AB. Точки прямой l симметричны сами себе.*

Определение. ***Осевой симметрией** S_l с осью l называется такое преобразование плоскости, при котором каждая точка переходит в симметричную ей относительно прямой l.*

Теорема. *Осевая симметрия сохраняет расстояния: если точки A_1 и B_1 симметричны соответственно точкам A и B относительно прямой l, то $AB=A_1B_1$.*

Определение. *Преобразование плоскости, сохраняющее расстояния между точками, называется **движением.***

Данное определение формализует понятие наложения. Можно доказать, что при любом движении отрезок переходит в отрезок, прямая – в прямую, луч – в луч, окружность – в окружность. Движения сохраняют величины углов.

59. Во что может переходит при движении: а) пара параллельных прямых; б) окружность и касательная к ней?

Определение. *Две **фигуры** называются **равными**, если существует движение, переводящее одну из них в другую.*

Если при осевой симметрии с осью *l* фигура переходит сама в себя, то она называется *симметричной относительно оси l,* а прямая *l* называется ее *осью симметрии*.

60. Укажите оси симметрии прямой, отрезка, угла, окружности.

Докажем на языке осевой симметрии известные факты:

Теорема. *Биссектриса, проведенная к основанию равнобедренного треугольника, является его осью симметрии.*

Следствие 1. *Углы при основании равнобедренного треугольника равны.*

Следствие 2. *Биссектриса, медиана и высота равнобедренного треугольника, проведенные к его основанию, совпадают.*

Теорема. *Если два угла треугольника равны, то он равнобедренный.*

61. Докажите, что диаметр, перпендикулярный хорде, делит ее и стягиваемые ею дуги пополам. Сформулируйте обратные утверждения и проверьте их истинность.
62. Даны две концентрические окружности. Третья окружность пересекает одну из них в точках A и D, а другую – в точках B и C. Докажите, что AB = CD, AC = BD, а AD || CD.

Центральная симметрия.

Определение. *Точки A и B называются **симметричными относительно точки** O, если O является серединой отрезка AB. Точка O симметрична сама себе.*

Определение. ***Центральной симметрией** Z_O с центром O называется такое преобразование плоскости, при котором каждая точка переходит в симметричную ей относительно точки O.*

Теорема. *Центральная симметрия является движением.*

Теорема. *Центрально симметричные прямые параллельны.*

Теорема. *Параллельные прямые центрально-симметричны.*

63. Есть ли центр симметрии (Сколько? Где именно?) у отрезка, луча, прямой, угла, окружности, треугольника?
64. Докажите, что противоположные стороны шестиугольника, образованного сторонами треугольника и касательными к его вписанной окружности, проведенными параллельно сторонам, равны.
65. Через общую точку двух пересекающихся окружностей проведите прямую так, чтобы данные окружности высекали на ней равные хорды.

Домашнее задание.

66. На одной стороне угла с вершиной O отмечены точки A и B, а на другой – точки A_1 и B_1, при этом $OA = OA_1$, $OB = OB_1$. Докажите, что точка пересечения отрезков A_1B и B_1A лежит на биссектрисе этого угла, с помощью: а) равенства треугольников; б) осевой симметрии.
67. Даны две точки A и B. Найдите геометрическое место точек, каждая из которых симметрична точке A относительно некоторой прямой, проходящей через точку B.
68. Начертите фигуру, состоящую из трех окружностей и имеющую ровно а) одну; б) две; в) три; г) бесконечно много осей симметрии.
69. Постройте треугольник по данным двум вершинам и прямой, содержащей биссектрису угла при третьей вершине.
70. Точку O назовем «почти центром симметрии» фигуры F, если из F можно выбросить одну точку так, чтобы точка O была центром симметрии оставшейся части. Сколько «почти центров симметрии» может иметь фигура, состоящая а) из пяти точек, лежащих на одной прямой? б) из конечного числа точек плоскости?