Теория-06. На подступах к задаче С5.

Задачи с параметром. Решение «в лоб».

Непосредственное решение задачи с параметром, как правило, приводит к большим вычислительным трудностям. Их обходят, применяя различные соображения, которые мы рассмотрим на последующих занятиях. Однако, часто прямое, непосредственное решение задачи с параметром тоже оказывается необходимым (как элемент решения задачи) или допустимым (как альтернативный путь).

Взглянув на задачу с параметром, подставим мысленно вместо $\boldsymbol{a}$ число **5** и спросим себя: "Могу ли я решить такую задачу?" Если ответ утвердительный, спросим себя с укором: "А что мне тогда мешает решить задачу с произвольным $\boldsymbol{a}$?" И приступаем к решению, действуя с большой осторожностью и ***тщательно прописывая каждый шаг***. При решении задачи с параметром необходимо написать ***несколько десятков слов на русском языке***. Эти слова письменно изложат логику решения. Логику можно изложить и математическими символами, но школьнику такое изложение недоступно.

Разберём подробно один пример. Решение будем писать **жирным шрифтом**, размышления — *курсивом помельче.*

ЗАДАЧА. При каких $\boldsymbol{a}$ уравнение

$$\frac{a-1}{x+6}=\frac{2x+7}{(x+2)^2-x-22}$$

имеет корни, но не имеет положительных корней?

Понятно, что мы должны привести дроби к общему знаменателю. Знаменатель второй дроби кажется каким-то подозрительным, не так ли?

Преобразуем уравнение:

$$\frac{a-1}{x+6}=\frac{2x+7}{(x+2)^2-x-22}$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{a-1}{x+6}=\frac{2x+7}{x^2+3x-18}$$

$$\Updownarrow$$ *Полезно разложить теперь этот знаменатель.*

$$\frac{a-1}{x+6}=\frac{2x+7}{(x+6)(x-3)}$$

$$\Updownarrow$$ *О, круто.*

$$\frac{(a-1)(x-3)-(2x+7)}{(x+6)(x-3)}=0$$

$$\Updownarrow$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{(a-3)x-(3a+4)}{(x+6)(x-3)}=0$$

Уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} (a-3)x=3a+4 & (1)\\ (x+6)(x-3)\neq 0 & (2)\end{cases}$$

При решении (1) подмывает написать $x=\frac{3a+4}{a-3}$. Удержимся от этого. Ведь делить на ноль нельзя. Нельзя и писать $a\neq 3$, потому что числу a, честно говоря, наплевать, что мы про него напишем. Оно нам не подчиняется и вполне может оказаться тройкою. Но поделить-то хочется, поэтому пишем так:

Если $a=3$, уравнение (1) примет вид $0=13$ и корней иметь не будет. Если же $a\neq 3$, уравнение (1) имеет единственный корень $x=\frac{3a+4}{a-3}$. От этого корня требуется, чтобы он удовлетворял условию (2), а также не был положителен, то есть:

$$\begin{cases} \frac{3a+4}{a-3}\neq -6 & (3)\\ \frac{3a+4}{a-3}\neq 3 & (4)\\ \frac{3a+4}{a-3}\leqslant 0 & (5)\end{cases}$$

Условие (4) можно отбросить — если требовать (5), то (4), конечно, выполнится. Решая (3), получим что

$$3a+4\neq 18-6a$$

$$\Updownarrow$$ *Можно спокойно было умножать, мы же разбираем случай $a\neq 3$.*

$$a\neq\frac{14}{9}$$

Неравенство (5) решим методом интервалов. Числитель обращается в ноль при $a=-\frac{4}{3}$, знаменатель — при $a=3$.

Тут мы рисуем схему [которую меня ломает набирать на компьютере :-)] и получаем ответ:

$$-\frac{4}{3}\leqslant a<3$$

С учётом $a\neq\frac{14}{9}$, получаем ответ.

Ответ: при $a\in\left[-\frac{4}{3}\,;\,\frac{14}{9}\right)\cup\left(\frac{14}{9}\,;\,3\right)$.

В принципе, всё несложно. Посмотрим только, что было бы, если бы мы не догадались разложить $x^2+3x-18$ на множители? Мы бы привели к общему знаменателю "в лоб" и получили бы вместо (1) такое уравнение:

$$(a-1)(x^2+3x-18)=(2x+7)(x+6)$$

Раскрыли бы скобки:

$$(a-1)x^2+3(a-1)x-18(a-1)=2x^2+19x+42$$

Получили бы жутковатое квадратное уравнение:

$$(a-3)x^2+(3a-22)x-(18a+24)=0$$

Отсеяли бы случай $a=3$*, а потом написали бы дискриминант:*

$$D=(3a-22)^2+4(a-3)(18a+24)=81a^2-252a+196$$

И он оказался бы полным квадратом!

$$D=81a^2-252a+196=(9a-14)^2$$

Написали бы корни, и получили бы $x=-6$ *и* $x=\frac{3a+4}{a-3}$*. И далее как в нашем решении. Так что справились бы. Но большой кровью, да.*