Основания геометрии

Система аксиом евклидовой планиметрии

Плоскость – это множество элементов, называемых *точками*, среди которых выделены непустые подмножества, называемые *прямыми*, причем выполняются следующие аксиомы:

1. *Аксиомы принадлежности*.

A1.1 На каждой прямой лежат по крайней мере две точки.

A1.2 Существуют три точки, не принадлежащие одной прямой.

A1.3 (Аксиома прямой) Через любые две различные точки проходит одна и только одна прямая.

2. *Аксиомы расстояния*. Существует функция, называемая *расстоянием*, ставящая каждой паре точек A и B плоскости в соответствие действительное число ρ(A, B), и обладающая следующими свойствами:

A2.1 $\rho(A, B) \geq 0$, причем $\rho(A, B) = 0$ тогда и только тогда, когда $A = B$.

A2.2 $\rho(A, B) = \rho(B, A)$

A2.3 $\rho(A, B) + \rho(B, C) \geq \rho(A, C)$

Определение. Точка B *лежит между* точками A и C, если $\rho(A, B) + \rho(B, C) = \rho(A, C)$, и точки A, B, C различны.

Определение. Множество, состоящее из различных точек A и B и всех точек, лежащих между ними, назывется *отрезком* AB.

3. *Аксиомы порядка*.

A3.1 Различные точки A, B и C лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда одна из них лежит между двумя другими.

A3.2 Любая точка A, принадлежащая прямой *a*, разбивает множество отличных от A точек этой прямой на два непустых подмножества, таких, что точка A лежит между двумя точками B и C, принадлежащими *a*, тогда и только тогда, когда когда B и C принадлежат разным подмножествам.

Определение. Объединение каждого из этих подмножеств с точкой A называется *лучом* с началом в точке A.

A3.3 (Аксиома об откладывании отрезка.) На всяком луче с началом в точке A существует единственная точка, находящаяся на данном неотрицательном расстоянии от точки A.

A3.4 Любая прямая *l* разбивает множество не принадлежащих ей точек этой плоскости на два непустых подмножества, таких, что точки A и B принадлежат разным подмножествам тогда и только тогда, когда отрезок AB пересекает прямую *l*.

Определение. Каждое из таких подмножеств называется *открытой полуплоскостью*, прямая *l* – их *границей*, объединение открытой полуплоскости с ее границей – *полуплоскостью*.

Определение. Пересечение двух полуплоскостей с пересекающимися границами называется углом.

Определение. Объединение открытой полуплоскости с лучом, лежащим на ее границе, называется *флагом*, открытая полуплоскость – его *полотнищем*, луч – *древком*, начало луча – *началом* флага.

A3.5 (Аксиома об откладывании луча.) Существует единственный луч, лежащий в данном флаге, имеющий с ним общее начало и составляющий с древком флага угол, равный данному.

4. *Аксиома подвижности*.

Определение. Преобразование плоскости, сохраняющее расстояния, называется *движением*.

A4 Для любых двух флагов существует и единственно движение, отображающее один из них на другой, причем начало отображается на начало, древко – на древко, полотнище – на полотнище.

5. *Аксиома параллельных*.

Определение. Прямые называются *параллельными*, если они не пересекаются или совпадают.

A5 Через любую точку плоскости проходит не более одной прямой, параллельной данной.

Простейшие следствия из аксиом.

Теорема 1. Любые две различные прямые имеют не более одной общей точки.

Теорема 2. (неравенство треугольника) Если точки A, B, C не лежат на одной прямой, то $\rho(A, B) + \rho(B, C) > \rho(A, C)$.

Теорема 3. I признак равенства треугольников.

Теорема 4. II признак равенства треугольников.

Свойства системы аксиом и их проверка с помощью моделей.

1. Непротиворечивость (т. е. невозможность вывода логически противоречащих друг другу утверждений).
2. Полнота (возможность доказать или опровергнуть любое утверждение, касающееся описываемых объектов и отношений).
3. Независимость (невозможность вывода одной из аксиом из остальных).

Назовем точками пары действительных чисел (x, y), прямыми – множества точек, удовлетворяющих линейному уравнению ax+by+c=0. Можно проверить, что для этой модели выполняются все аксиомы. Поэтому если бы евклидова система аксиом была противоречивой, противоречивой была бы и аксиоматика действительных чисел.

Полноту евклидовой геометрии примем без доказательства.

Независимость надо обсуждать отдельно для каждой аксиомы. Если одну аксиому заменить ее отрицанием, а остальные оставить без изменений, и такая аксиоматика окажется непротиворечивой (что доказывается предъявлением модели), то выбранная аксиома независима.

Аксиома параллельных независима. Заменив ее на утверждение: «Через любую точку вне данной прямой проходит бесконечно много прямых, не пересекающих данную», получим геометрию Лобачевского. В ней выполняются, в частности, следующие теоремы:

- Для любых двух прямых найдется прямая, параллельная им обеим.
- Два треугольника равны, если их углы попарно равны.
- Сумма углов треугольника меньше 180°, причем чем больше площадь треугольника, тем меньше сумма его углов.

Ее непротиворечивость доказывается, например с помощью *модели Кэли-Клейна*. Плоскость в ней представляется в виде внутренности круга с бесконечно удаленной границей (абсолюта). Прямыми считаются хорды абсолюта, а движениями – любые преобразования, переводящие точки абсолюта в точки абсолюта, а прямые – в прямые.

В *модели Пуанкаре* плоскость также представляется в виде внутренности абсолюта. Прямыми считаются дуги окружностей, ортогональных к абсолюту, и его диаметры. Расстояние измеряется по сложному правилу. Зато угол между «прямыми» равен углу между соответствующими евклидовыми дугами. Движениями плоскости Лобачевского в модели Пуанкаре являются:

- Поворот круга вокруг его центра («прямые» переходят в «прямые», а «треугольники» – в равные «треугольники» (по углам), поэтому расстояния сохраняются).
- Симметрия относительно диаметра круга
- Инверсия относительно произвольной «прямой».
- Композиции трех перечисленных движений.