Гимназия 1543, математический спецкурс, 8 В

Зачет, билет 1

Пункты с 1 по 3 сдаются только в устной форме. Пункты с 4 по 6 — в письменной сразу по окончании зачёта.

1) Метод математической индукции: принцип наименьшего числа и его использование для доказательства утверждений с натуральным параметром.

2) Пусть a, b, m — целые числа, причем $m \mid a$ и $m \nmid b$. Какие из следующих утверждений всегда верны или всегда неверны: $m \mid (a+b)$, $m \mid (a-b)$, $m \mid (ab)$? Ответ обоснуйте.

3) Произвольный вопрос по 1 дополнительной части программы.

4) Докажите, что (при любом $n \geqslant 1$) верно равенство: $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + (n-1) \cdot n = (n-1)n(n+1)/3$.

5) Каково наименьшее натуральное n, при котором $n!$ делится на 1000?

6) Пусть $n = p_1^{\alpha_1} \ldots p_k^{\alpha_k}$. Доказать, что сумма всех различных натуральных делителей числа n равна

$$\frac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1} \cdot \ldots \cdot \frac{p_k^{\alpha_k+1}-1}{p_k-1}$$

.

Гимназия 1543, математический спецкурс, 8 В

Зачет, билет 2

Пункты с 1 по 3 сдаются только в устной форме. Пункты с 4 по 6 — в письменной сразу по окончании зачёта.

1) Докажите, что любое натуральное число раскладывается в произведение простых сомножителей.

2) Пусть a, b, m — целые числа, причем $m \nmid a$ и $m \nmid b$. Можно ли утверждать, что $m \nmid (a+b)$, $m \nmid (a-b)$, $m \nmid (ab)$? Ответ обоснуйте.

3) Произвольный вопрос по 1 дополнительной части программы.

4) Последовательность задана рекуррентно: $a_1 = 2$, $a_{n+1} = 3a_n + 10n - 7$. Докажите по индукции, что члены этой последовательность вычисляются по следующей формуле: $a_n = 2 \cdot 3^n - 5n + 1$.

5) Докажите, что квадрат натурального числа имеет нечетное количество делителей. Верно ли обратное?

6) Простые числа p и q таковы, что $q \mid 5^p + 1$, а $p \mid 3^{3q} - 1$. Доказать, что среди чисел p и q есть 2, 3 или 13.

Гимназия 1543, математический спецкурс, 8 В

Зачет, билет 3

Пункты с 1 по 3 сдаются только в устной форме. Пункты с 4 по 6 — в письменной сразу по окончании зачёта.

1) Напишите формулу для вычисления суммы целых чисел от 1 до n и докажите ее с помощью метода математической индукции.

2) Докажите, что для любых целых чисел a и b ($b \neq 0$) существуют такие числа q и r, что $a = bq + r$ и $0 \leqslant r < |b|$.

3) Произвольный вопрос по 1 дополнительной части программы.

4) Докажите, что при любом натуральном n верно равенство:

$$1 + 5 + 5^2 + 5^3 + \cdots + 5^{n-1} = \frac{5^n - 1}{4}.$$

5) Найдите число, кратное 12 и имеющее ровно 14 делителей.

6) Докажите, что $(a_1^2+1)(a_2^2+1)\ldots(a_k^2+1)$ может быть представлено в виде суммы двух квадратов, где $a_1, a_2, \ldots, a_k$ – натуральные.

Гимназия 1543, математический спецкурс, 8 В

Зачет, билет 4

Пункты с 1 по 3 сдаются только в устной форме. Пункты с 4 по 6 — в письменной сразу по окончании зачёта.

1) Понятие последовательности. Явная и рекуррентная формы задания последовательности.

2) Дайте определение делимости целых чисел. Докажите основные свойства делимости:
а) $a \mid a$; б) из $a \mid b$ и $b \mid c$ следует $a \mid c$; в) из $a \mid b$ следует $a \mid xb$; г) из $a \mid b$ и $a \mid c$ следует $a \mid (b+c)$.

3) Произвольный вопрос по 1 дополнительной части программы.

4) Докажите, что при любом натуральном $n \geqslant 2$ верно равенство:

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{n+1}{2n}.$$

5) Простым или составным является число а) 3999991; б) 1000027; в) $9^{10}+6^{10}+4^9$?

6) Докажите, что $n^n \geqslant (n+1)^{n-1}$, где n – натуральное число.

Пункты с 1 по 3 сдаются только в устной форме. Пункты с 4 по 6 — в письменной сразу по окончании зачёта.

Гимназия 1543, математический спецкурс, 8 В

Зачет, билет 5

1) Метод математической индукции: принцип наименьшего числа и его использование для доказательства утверждений с натуральным параметром.

2) Сформулируйте основную теорему арифметики. Что называется последовательностью степеней простых множителей числа? Докажите, что последовательность степеней простых множителей произведения ab равна сумме последовательностей степеней простых множителей a и b.

3) Произвольный вопрос по 1 дополнительной части программы.

4) Докажите по индукции, что при любом натуральном n число $5^{2n}-1$ делится на 8.

5) Программист Вася написал программу, которая находит НОК всех чисел от 1 до 100. Хакер Петя стер числа от 1 до 50, и теперь программа считает НОК всех чисел от 51 до 100. Как изменится ответ?

6) Докажите для чисел Фибоначчи F_n тождество Кассини: $F_n^2 = F_{n-1}F_{n+1} - (-1)^n$.

Гимназия 1543, математический спецкурс, 8 В

Зачет, билет 6

Пункты с 1 по 3 сдаются только в устной форме. Пункты с 4 по 6 — в письменной сразу по окончании зачёта.

1) Путешественник отправился из своего родного города A в самый удаленный от него город страны B; затем из B – в самый удаленный от него город C и т.д. Докажите, что если C не совпадает с A, то путешественник никогда не вернется домой. (Расстояния между городами страны различны.)

2) Дайте определение наибольшего общего делителя и наименьшего общего кратного двух целых чисел. Чему равны последовательности степеней простых множителей НОД и НОК? Докажите.

3) Произвольный вопрос по 1 дополнительной части программы.

4) Докажите, что при любом натуральном $n \geqslant 4$ выполнено неравенство: $n^2 > 3n + 2$.

5) Может ли число, имеющее ровно 15 делителей, делиться а) на 100; б) на 1000?

6) Докажите для чисел Фибоначчи F_n тождество Кассини: $F_n^2 = F_{n-1}F_{n+1} - (-1)^n$.
