

Гимназия 1543, математический спецкурс, 8 В
Занятие 10: диофантовы уравнения

Линейные диофантовы уравнения с двумя переменными

Определение. *Линейное диофантово уравнение с двумя переменными* — это уравнение в целых числах вида

$$ax + by = c$$

относительно переменных x и y (предполагается, что a и b отличны от нуля).

Замечание. Уравнения, которые требуется решить в целых числах, называются *диофантовыми* в честь древнегреческого математика Диофанта Александрийского.

- 1) Докажите, что число x является решением сравнения $ax \equiv c \pmod{b}$ тогда и только тогда, когда для некоторого y выполнено

$$ax + by = c.$$

Схема решения диофантова уравнения:

1. Решить сравнение $ax \equiv c \pmod{b}$.
2. Выразить y через x по формуле

$$y = (c - ax)/b.$$

- 2) Обоснуйте приведенную схему решения диофантова уравнения (формулу из п.2).

- 0) Кузнечик прыгает по числовой прямой. Сначала он делает один или несколько прыжков длины 3 в одну сторону, а затем один или несколько прыжков длины 5 в другую сторону. Как ему попасть из точки 0 в точку 7? Найдите все варианты.

- 1) Докажите, что если $\text{НОД}(a, b) = 1$, то уравнение $ax + by = 1$ разрешимо.

Схема решения диофантова уравнения:

1. Найти какое-нибудь (частное) решение уравнения $ax + by = c$ (используя алгоритм Евклида).
2. Найти все решения уравнения $ax + by = 0$.
3. Сложить эти решения.

- 2) Обоснуйте приведенную схему решения диофантова уравнения, т.е. докажите, что а) полученная таким образом пара чисел x и y удовлетворяет исходному уравнению; б) таким способом мы получаем все решения данного уравнения.

- 3) Докажите, что уравнение $ax + by = c$ имеет решение тогда и только тогда, когда $\text{НОД}(a, b) \mid c$.

- 4) Найдите все целые x, y , удовлетворяющие равенству $81x + 23y = 3$.

- 5) Даны углы в 32° и 25° . Как построить угол в 1° ?

- 6) Сколько точек с целыми координатами расположено на прямой

$$y = \frac{8}{13}x + \frac{6}{13}$$

при $-100 \leq x \leq 50$?

- 7) На площади стоят дяди и тётки. У каждого дяди в кармане было 13 рублей, у каждой тётки — 23 рубля. По площади прошёл вор и незаметно украл все деньги. Какое наибольшее количество людей могло стоять на площади, если вор украл всего 2011 рублей?

- 8) На складе 3000 шкафов. Розовый шлюбзик умеет носить 7 шкафов, а лысый шпегльморгер — 20 шкафов. Сколькими способами можно послать отряд шлюбзиков и шпегльморгеров, чтобы они за один раз вынесли весь склад и каждый из них был загружен полностью?

- 9) Ответьте на вопрос:

Шли сорок мышей, несли сорок грошей,
Две мыши поплоше несли по два гроша,
Немало мышей — вообще без грошей.
Большие совсем тащили по семь.
А остальные несли по четыре.
Сколько мышей шли без грошей?

(И. Акулич. «Квант», №4, 1995)

Более сложные уравнения

- 10) Решите в целых числах уравнение $2x + 3y + 5z = 13$.
- 11) Решите в целых числах уравнение $xy + 3x - 5y + 3 = 0$.
- 12) Решите в целых числах уравнение $2x^2 + 5xy + 3y^2 = 21$.
- 13) Решите в целых числах уравнение $x + y = x^2 - xy + y^2$.
- 14) Решите в натуральных числах уравнение $2^x + 7 = y^2$.