

**Дробно-рациональные выражения**

*Ехал, ехал, плелся, плелся,  
Вдруг споткнулся и уперся...*

Юлий Ким

38. а)  $\frac{1-x}{1-x+x^2} + \frac{1+x}{1+x+x^2}$ ; б)  $\frac{a+\frac{bc}{ac}}{b+\frac{bc}{a+c}}$ ; в)  $\frac{x-\frac{yz}{xz}}{y-\frac{yz}{x-z}}$ ; г)  $\frac{\frac{a-x}{a} + \frac{x}{a+x}}{\frac{a-x}{a} - \frac{x}{a+x}}$ .
39. а)  $x^2 - 6x + 1 + \frac{1 + \frac{(x-5)(x-3)}{(1+5x)(1+3x)}}{\frac{x-3}{1+3x} - \frac{x-5}{1+5x}}$ ; б)  $\frac{\frac{x^2+y^2}{x-y} - \frac{x^2-y^2}{x+y}}{\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} + \frac{x^2-y^2}{x^2-y^2}} \cdot \frac{y^2 - xy + x^2}{2xy}$ ; в)  $\frac{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{2c}{ab}\right)(a+b+2c)}{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{2}{ab} - \frac{4c^2}{a^2b^2}}$ .
40. а)  $\left(\frac{5c^2 - c}{25c^2 - 10c + 1} + \frac{4}{1 - 25c^2}\right) : \left(1 - \frac{3}{5c-1}\right)$ ; б)  $\frac{(a-b)^2 + ab}{(a+b)^2 - ab} : \frac{(a^5 + b^5 + a^2b^3 + a^3b^2)}{(a^3 + b^3 + a^2b + ab^2)(a^3 - b^3)}$ .
41. \*  $\left(\frac{1}{t^2 + 3t + 2} + \frac{2t}{t^2 + 4t + 3} + \frac{1}{t^2 + 5t + 6}\right)^2 \cdot \frac{(t-3)^2 + 12t}{2}$ .
42. \*  $\left((x-y) \cdot \left(x - \frac{x^2y - y^2}{x+y+xy}\right) : \left(x+y - \frac{xy}{x+y}\right) - \frac{x^2 - y^2}{(x+y)^2 + x^2y + xy^2}\right) : \frac{x^3 + x^2y - x^2 - xy^2 - y^3 + y^2}{x + xy + y}$ .
43. а)  $\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}$ ; б) \*  $\frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \dots + \frac{199}{99^2 \cdot 100^2}$ .
44. а)  $\frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}}$ ; б)  $\frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{y}}}$ .

45. Выполните подстановку и упростите полученное выражение:  $\frac{ax}{a+x} - \frac{bx}{b-x}$ , где  $x = \frac{ab}{a-b}$ .

46. Найдите наибольшее значение выражения  $\frac{4}{\left(\frac{x}{2} + 1\right)^2 + \left(\frac{x}{2} - 1\right)^2}$

47. Докажите, что если  $\frac{x_1}{x_2} = \frac{x_2}{x_3} = \frac{x_3}{x_4}$ , то: а)  $\frac{x_1 + x_2 + x_3}{x_2 + x_3 + x_4} = \frac{x_1}{x_2}$ ; б)  $\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{x_2 + x_3 + x_4}\right)^3 = \frac{x_1}{x_4}$ .

**Представление дроби в виде суммы дробей**

48. Представьте дробь в виде суммы дробей с однозначными знаменателями: а)  $\frac{8}{15}$ ; б)  $\frac{41}{63}$ ; в)  $\frac{29}{45}$ .

49. Представьте дробь  $\frac{1}{2}$  в виде суммы трех дробей со знаменателями: а) 5, 6 и 15; б) 4, 6 и 12.

50. Представьте дробь в виде суммы дробей с линейными знаменателями:

а)  $\frac{2x+6}{x^2-4}$ ; б)  $\frac{5x-1}{x^2-x}$ ; в)  $\frac{7x-6}{(x+2)(x-3)}$ ; г) \*  $\frac{3x-4}{x^2+10x+24}$ .

51. Найдите значения  $a$ ,  $b$  и  $c$ , при которых равенство  $\frac{x^2 - x + 1}{(x-1)^3} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{c}{(x-1)^3}$ .

52. Представьте дробь в виде суммы дробей с линейными знаменателями:

а)  $\frac{4x+3}{x^2-1}$ ; б)  $\frac{2y^2-5y+4}{y^3-4y^2+4y}$ .

**Выделение целой части**

53. При каких натуральных  $n$  дробь принимает натуральные значения: а)  $\frac{7n^2 + 3n + 12}{n}$ ; б)  $\frac{n^2 - n}{n+2}$ ?

54. Укажите все точки с целочисленными координатами, принадлежащие графику функции  $y = \frac{x^2 - 4x + 6}{x - 2}$ .

55. Найдите все возможные целые значения дроби при условии  $n \in \mathbb{N}$ : а)  $\frac{n^2 - 3n - 15}{n - 5}$ ; б)  $\frac{n^3 - n^2 - n + 7}{n + 1}$ .

56. Выделите целую часть дробного выражения: а)  $\frac{x^7 - 1}{x^3 + x + 1}$ ; б)  $\frac{x^4 - 64}{x - 3}$ .

57. Найдите значение дроби  $\frac{x^3 + x + 222}{37x}$  при  $x = 6$ .

58. Найдите значение дроби  $\frac{x^3 + x^2 - x + 2}{x^2 - x + 1}$  при  $x = -1, 75$ .

59. \* Докажите, что дробь  $\frac{2n+5}{2n^2+5n+2}$  несократима ни при каком натуральном  $n$ .