Решения 2

Задача 43. Многочлен $P(x)$ имеет действительные коэффициенты, но не имеет действительных корней. Докажите, что количество его комплексных корней — четно.

Решение Заметим, что если z корень многочлена P, то $\bar{z}$ тоже является корнем. Действительно:

$$P(\bar{z}) = a_n\bar{z}^n + a_{n-1}\bar{z}^{n-1} + \cdots + a_0 = a_n\overline{z^n} + a_{n-1}\overline{z^{n-1}} + \cdots + a_0 = \\ = \overline{a_n z^n} + \overline{a_{n-1}z^{n-1}} + \cdots + \overline{a_0} = \overline{a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0} = \overline{P(z)}$$

Значит, все комплексные корни разбиваются на пары, следовательно их четное число.□

3 задача, тургор, базовый тур В классе 20 школьников. Было устроено несколько экскурсий, в каждой из которых участвовало хотя бы четверо школьников этого класса. Докажите, что найдётся такая экскурсия, что каждый из участвовавших в ней школьников этого класса принял участие по меньшей мере в $1/17$ всех экскурсий

Решение От противного. Пусть таких экскурсий нет. Тогда на каждой экскурсии будет хотя бы один *плохой* школьник т.е. школьник который посетил менее $1/17$ всех экскурсий. Каждый плохой школьник идет не более чем на $1/17$ всех экскурсий, поэтому для того чтобы такие школьники заняли все экскурсии надо, чтобы их было хотя бы 18.

Но тогда хороших школьников не более двух, значит на каждой экскурсии должно быть хотя бы два плохих школьников. Но так как каждый плохой посещает менее $1/17$ всех экскурсий, то чтобы посетить все хотя бы по два раза нужно более 34 плохих школьников. А это невозможно.□