

**Интеграл (последний листок)**

Интегрирование по частям

$$\int u dv = uv - \int v du$$

При интегрировании произведения многочлена и тригонометрической функции удобно принимать многочлен за  $u$ , а тригонометрическую функцию за  $v$ .

111. а)  $\int x \sin x dx$ ; б)  $\int x^2 \sin x dx$ .

При интегрировании произведения многочлена обратной тригонометрической функции поступают наоборот: принимают многочлен за  $v$ , а обратную тригонометрическую функцию за  $u$ .

112. а)  $\int x \operatorname{arctg} x dx$ ; б)  $\int \arcsin x dx$ .

Вообще, за  $u$  принимают функцию, у которой производная проще самой функции (например,  $\ln x$ ). А  $dv$  должно "хорошо" интегрироваться.

113. а)  $\int x^3 \ln x dx$ ; б)  $\int \ln x dx$ ; в)  $\int e^x(2x^2 + x + 1) dx$ ; г)  $\int x^5 e^{x^3} dx$ .

114. а)  $\int e^x \cos x dx$ ; б)  $\int e^{2x} \sin^2 x dx$ ; в)  $\int x \sin \sqrt{x} dx$ ; г)  $\int \frac{x e^{\operatorname{arctg} x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx$ .

Теорема. Пусть  $u(x)$  и  $v(x)$  — непрерывно дифференцируемые на отрезке  $[a, b]$  функции. Тогда

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

115. Проинтегрируйте по частям: а)  $\int_0^{\pi} x \sin x dx$ ; б)  $\int_0^1 \arccos x dx$ .

116. Найдите площадь фигуры, ограниченной кривыми  $y = \log_2 x$ ,  $y = \log_{\frac{1}{2}} x$  и  $y = -1$ .

Домашнее задание

117. Проинтегрируйте по частям:

а)  $\int \ln^2 x dx$ ; б)  $\int e^{2x} \sin 2x dx$ ; в)  $\int \sin x \ln(\cos x) dx$ ; г)  $\int \arcsin^2 x dx$ ; д)  $\int e^{\sqrt{x}} dx$ .

118. Проинтегрируйте подходящим методом:

а)  $\int \frac{\ln^2 x}{x} dx$ ; б)  $\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$ ; в)  $\int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}$ ; г)  $\int \frac{dx}{1 + \sin x}$ ;

д)  $\int \frac{dx}{x \ln x \ln(\ln x)}$ ; е)  $\int x^2 \arccos x dx$ ; ж)  $\int x^2 e^{-2x} dx$ .

119. Вычислите: а)  $\int_0^{\sqrt{3}} x \operatorname{arctg} x dx$ ; б)  $\int_{\frac{1}{e}}^e |\ln x| dx$ .

120. Найдите точки максимума функции  $f(t) = \int_0^t \frac{x^4 - 5x^2 + 4}{\ln x(1 + \sin^2 x)} dx$

## Интегрирование рациональных дробей

Неправильную дробь можно представить в виде суммы многочлена и правильной дроби.

$$121. \int \frac{x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 4x + 5}{x^2 - 4x + 3} dx.$$

Любой многочлен можно представить в виде произведения линейных и неразложимых квадратичных множителей.

Определение. Элементарными рациональными дробями называются дроби четырех типов (дискриминанты знаменателей дробей третьего и четвертого типа отрицательны):

$$\text{I)} \frac{A}{ax + b}; \quad \text{II)} \frac{A}{(ax + b)^n}; \quad \text{III)} \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}; \quad \text{IV)} \frac{Ax + B}{(ax^2 + bx + c)^n}$$

Интегрирование элементарных дробей первого и второго типов

122. Проинтегрируйте в общем виде элементарные дроби первых двух типов.

123. а) Является ли элементарной дробь  $\frac{3x + 1}{5 - x}$ ? Найдите  $\int \frac{3x + 1}{5 - x} dx$ ;

б) Является ли элементарной дробь  $\frac{3x - 5}{x^2 - 5x + 6}$ ? Найдите  $\int \frac{3x - 5}{x^2 - 5x + 6} dx$ .

124. Разложите в сумму элементарных дробей дробь  $\frac{x + 1}{x^3 - 3x^2 + 2x}$  двумя способами: методом неопределенных коэффициентов и "методом поочередного домножения". Найдите  $\int \frac{x + 1}{x^3 - 3x^2 + 2x} dx$ .

125. Проинтегрируйте: а)  $\int \frac{x^3}{x^2 + x - 2} dx$ ; б)  $\int \frac{dx}{(x + 4)(x - 3)(x - 1)}$ .

126. Разложите в сумму элементарных дробей дробь  $\frac{1}{(x + 1)^3(x - 1)^2}$ . Найдите  $\int \frac{dx}{(x + 1)^3(x - 1)^2}$ .

127. Вычислите  $\int_0^1 \frac{dx}{(x - 2)^2(x + 1)}$ .

Интегрирование элементарных дробей третьего типа

128. а)  $\int_{-1}^3 \frac{dx}{x^2 + 2x + 3}$ ; б)  $\int_{-1}^1 \frac{x dx}{x^2 + 2x + 5}$ ; в)  $\int_0^1 \frac{x dx}{x^3 + 1}$ .

Замена переменной

129. а)  $\int \frac{(x^4 - 3)dx}{x(x^8 + 3x^4 + 2)}$ ; б)  $\int \frac{dx}{3 \sin^2 x - 8 \sin x \cos x + 5 \cos^2 x}$ .

Домашнее задание

130. а)  $\int \frac{x^3 + 2x^2 + 4x - 3}{x - 2} dx$ ; б)  $\int \frac{3}{2x - 1} dx$ ; в)  $\int \frac{3}{(2x - 1)^5} dx$ ; г)  $\int \frac{x - 4}{x^2 + 5x - 6} dx$ ;

д)  $\int \frac{x dx}{(x^2 - 4)(x^2 - 9)}$ ; е)  $\int \frac{15x^2 - 4x - 81}{x^3 - 13x + 12} dx$ ; ж)  $\int \frac{(x + 3)dx}{(x^2 + 5x - 6)^2}$ .