

Бесконечная геометрическая прогрессия

8 "В" класс

28 сентября 2011 г.

Представим себе Ахиллеса, который должен догнать черепаху, находящуюся от него на расстоянии одной стадии (примерно 200 м). Ахиллес бежит вдвое быстрее черепахи. Пока Ахиллес добежит до первоначального положения черепахи, она уползет от него еще, на половину стадии. Пока Ахиллес пробежит эти полстадии, черепаха уползет еще, на $\frac{1}{4}$ стадии. Затем Ахиллес пробежит и эти $\frac{1}{4}$ стадии. Далее Ахиллесу придется пробежать $\frac{1}{8}$ стадии, на которые за это время уползет черепаха, потом $\frac{1}{16}$, которую проползет черепаха, пока Ахиллес пробежал $\frac{1}{8}$, и так далее. Таким образом, весь путь Ахиллеса до момента, когда он догонит черепаху, разобьется на бесконечное число участков, причем каждый следующий участок будет вдвое короче предыдущего.

- (a) Запишите общий путь, пройденный Ахиллесом, в виде бесконечного числа слагаемых.
(b) Вычислите путь, который придется пройти Ахиллесу, пока он не догонит черепаху
(c) Выполните задания предыдущих двух пунктов при условии, что скорость черепахи составляет q скоростей Ахиллеса ($q < 1$).

Пусть $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ — бесконечная геометрическая прогрессия со знаменателем q , ($|q| < 1$). Тогда e , суммой будем называть число $\frac{a_0}{1-q}$ (Обоснуйте это определение для случая $-1 < q < 0$).

- Вычислите бесконечные суммы

(a) $5 + \frac{5}{3} + \frac{5}{9} + \frac{5}{27} + \dots$

(b) $\frac{3}{5} + \frac{3}{25} + \frac{3}{125} + \dots$

(c) $\frac{5}{3} - \frac{5}{9} + \frac{5}{27} - \frac{5}{81} + \dots$

- Запишите в виде обыкновенных дробей

(a) $0, (7) = \frac{7}{10} + \frac{7}{100} + \dots$

(b) $0.(142857)$

(c) $0.1(6)$

4. Сформулируйте общее правило перевода бесконечной десятичной дроби $0.a_1 \dots a_m(b_1 \dots b_n)$ в обыкновенную
5. Приведите пример, если это возможно, бесконечной геометрической прогрессии сумма которой
- (a) в два раза больше ее первого члена
 - (b) в два раза меньше ее первого члена
 - (c) в полтора раза меньше ее первого члена
6. Вычислите сумму

$$1 + \frac{3}{2} + \frac{5}{4} + \dots + \frac{2n+1}{2^n} + \dots$$