Дифференциал

Порядок малости

Пусть $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$ и $\lim\limits_{x\to x_0}\beta(x)=0$.

Тогда если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$, то говорят, что $\alpha(x)$ — бесконечно малая высшего порядка, чем $\beta(x)$ (а $\beta(x)$ — бесконечно малая низшего порядка, чем $\alpha(x)$).

Обозначение: $\alpha(x)=o(\beta(x))$ (читается "о малое").

Если же $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\mathbf{c}$, где $c\neq 0$ то говорят, что $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — бесконечно малые одного порядка малости. Обозначение: $\alpha(x)=O(\beta(x))$ (читается "о большое").

В частности, если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ эквивалентны.

1. Сравните по порядку малости при $x\to 0$ функции: x, x^2, $5x^2$, x^3, x^3-3x^2, $\sin x$, $\arcsin x$, $\operatorname{tg} x$, e^x-1.

Определение дифференциала

2. Рассмотрим зависимость площади круга от его радиуса $S(r)=\pi r^2$. Придадим радиусу r малое приращение Δr. Найдите ΔS и представьте его в виде $\Delta S=k\Delta r+o(\Delta r)$ Каков геометрический смысл полученного результата?

Рассмотрим функцию $y=f(x)$. Зафиксируем x_0 и рассмотрим приращение функции $\Delta f=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ при $\lim\limits_{\Delta x\to 0}f(x)=0$. Если $f(x)$ непрерывна в точке x_0, то и $\lim\limits_{\Delta f\to 0}f(x)=0$.

Определение. Если $\Delta f=k\Delta x+o(\Delta x)$, то говорят, что $f(x)$ ***дифференцируема*** в точке x_0, а выражение $k\Delta x$ называют ***дифференциалом*** функции $f(x)$ в точке x_0 и обозначают $df(x)$ или dy.

Замечание 1. Дифференциал — линейная относительно Δx часть приращения функции.

Замечание 2. df отличается от Δf на бесконечно малую более высокого порядка, чем Δx.

3. Истолкуйте геометрический смысл дифференциала с помощью касательной.

Ранее дифференцируемой называлась функция, имеющая производную. Корректность такого "двойного"определения показывает очевидная

Теорема. Для того, чтобы функция $f(x)$ была дифференцируемой в точке x_0, необходимо и достаточно, чтобы в точке x_0 у нее существовала конечная производная.

При этом коэффициент k из определения дифференциала равен $f'(x_0)$, т.е. $dy=f'(x)\Delta x$.

3. Найдите дифференциалы функций $y=x$, $y=2x+3$, $y=\sin x$.

   Как только что проверено, $dx=\Delta x$. Поэтому $dy=f'(x)dx$ или $f'(x)=\dfrac{dy}{dx}$.

Правила дифференцирования

$$d(cu)=cdu;\qquad d(uv)=vdu+udv;\qquad df(u(x))=f'(u)\cdot du(x).$$
$$d(u+v)=du+dv;\qquad d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{vdu-udv}{v^2};$$

4. Составьте таблицу дифференциалов элементарных функций.

5. Найдите дифференциалы: а) $d\left(3x^2+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$; б) $d\log\sin x$; в) $d\dfrac{x^2+x}{x-1}$.

6. Найдите дифференциалы следующих функций:

а) $y=5x^3-\dfrac{2}{x^3}$;	г) $y=\cos\sqrt{5x-\dfrac{\pi}{3}}$;	ж) $y=(x^3-1)e^{x^3}$;	к) $y=x^2\arccos x$;
б) $y=6\sqrt{x}+2\sqrt[3]{x}$;	д) $y=e^{x^\alpha}$;	з) $y=\log_2\arcsin x$;	л) $y=\operatorname{arctg}\sqrt{x}$;
в) $y=\sin 8x+\operatorname{tg}2x$;	е) $y=\dfrac{x}{1+x^2}$;	и) $y=x^2\cos x$;	м) $y=e^x\sin x$.

Дифференциал и приближенные вычисления

Перепишем знакомую формулу по-другому: $f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+dx+o(\Delta x)$. Отбрасывая $o(\Delta x)$, получаем приближенное равенство $f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+dx=f(x_0)+f'(x_0)\Delta x$.

7. Вычислите приближенно $2{,}014^3$. Оцените погрешность и оставьте только верные цифры.

8. Вычислите приближенно $\sqrt{26}$; $\sqrt[3]{26}$. Сравните результат с мнением калькулятора.