Полнота множества действительных чисел

Аксиома (Кантора о вложенных отрезках). Пусть есть бесконечная система вложенных отрезков

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset [a_3, b_3] \supset \dots \supset [a_n, b_n] \supset \dots,$$

Тогда все эти отрезки имеют имеет хотя бы одну общую точку.

Задача 1. Если длины отрезков будут стремится к нулю, то эта общая точка будет единственная.

Задача 2. Любая ли последовательность $(a_1, b_1) \supset (a_2, b_2) \supset (a_3, b_3) \supset \dots$, вложенных интервалов имеет общую точку?

Аксиома вложенных отрезков равносильна каждому из следующих двух утверждений[1].

Аксиома (О ограниченной монотонной последовательности). Всякая ограниченная монотонная последовательность имеет предел.

Аксиома. Любое действительное число можно записать в виде бесконечной (периодической или непериодической) десятичной дроби и каждой такой дроби соответствует некоторое действительное число.

Замечание. Десятичная запись числа единственная, по модулю эквивалентности записей вида $\overline{b_0 b_1 \dots b_{i-1} b_i 999\dots} = \overline{b_0 b_1 \dots b_{i-1}(b_i+1)000\dots}$

Задача 3. Докажите, что следующие последовательности имеют предел.

а) $\frac{1}{3},\ \frac{1}{3}+\frac{1}{5},\ \frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{9},\ \frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{9}+\frac{1}{17},\ \frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{9}+\frac{1}{17}+\frac{1}{33}\dots$

б) $\sqrt{2},\ \sqrt{2\sqrt{2}},\ \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}}, \dots$

в) $\sqrt{2},\ \sqrt{2+\sqrt{2}},\ \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}, \dots$

г) $1, 1+\frac{1}{1!}, 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}, 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}\dots$

Определение 1. Число b называется *верхней гранью* множества $M \in \mathbb{R}$ если $\forall x \in M\ x \le b$. Минимальный элемент в множестве верхних граней называется *точной верхней гранью.* Обозначение: $\sup M$ (“supremum”).

Аналогично определяется $\inf M$ (“infimum”), точная нижняя грань множества M

---

[1] при выполнении аксиомы Архимеда

Задача 4. а) Докажите, что число b является точной верхней гранью множества M если и только если $\forall x \in M\, x \leq b$ и $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x \in M : b - \varepsilon < x$.
б) (**Аксиома Вейерштрасса**) Докажите, что у любого ограниченного сверху множества есть точная верхняя грань.

Задача 5 (Аксиома Больцано-Вейерштрасса). Докажите, что любая ограниченная последовательнось имеет предельную точку.

Задача 6. Выведите из аксиомы об ограниченной монотонной последовательности аксиому о вложенных отрезках.

Задача 7. Найдите пределы последовательностей из задач 3б и 3в.

Задача 8 (Аксиома Дедекинда). Пусть L и R — два непустых множества действительных чисел причем L находится «левее» R: если $l \in L$ и $r \in R$, то $l \leq r$. Докажите, что существует *разделяющее число* c для которого $l \leq c \leq r$ для любых $l \in L$, $r \in R$.

Задача 9* (Аксиома Коши). Последовательность $\{x_n\}$ называется *фундаментальной*, если

$$\forall \varepsilon \, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n, m > N \, |x_n - x_m| < \varepsilon$$

Докажите, что любая фундаментальная последовательность действительных чисел сходится.

Задача 10*. Выведите из существование точной верхней грани *аксиому Архимеда*: $\forall a \in \mathbb{R} \, \exists n \in \mathbb{N} : a < n$.

Указание: От противного, предположите что множество натуральных чисел ограничено.