

Предел последовательности-2

Теорема о предельном переходе в неравенствах.

Пусть $(x_n), (y_n)$ — две такие последовательности, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = X$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = Y$, и для почти всех n выполняется неравенство $x_n \leq y_n$. Тогда $X \leq Y$.

18. Можно ли оба знака неравенства в теореме о предельном переходе заменить на строгие?

19. Найдите $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n}$.

Теорема о зажатой переменной ("о двух полицейских").

Пусть $(x_n), (y_n), (z_n)$ — три последовательности, причем $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = A$, и почти для всех n выполняется неравенство $x_n \leq y_n \leq z_n$. Тогда последовательность (y_n) также сходится к A .

20. Докажите, что если для почти всех n $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq q < 1$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

21. Пусть для почти всех n $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$. а) Обязательно ли последовательность a_n сходится?
б) Может ли последовательность a_n иметь предел, отличный от нуля?

22. Докажите, что следующие последовательности бесконечно малы:

а) $\left(\frac{n}{2^n} \right)$;

б) $\left(\frac{a^n}{n!} \right)$ при всех $a > 0$ (факториал растет быстрее геометрической прогрессии).

Теорема Вейерштрасса.

Всякая монотонная ограниченная последовательность сходится.

23. Найдите с помощью теоремы Вейерштрасса предел последовательности: а) $x_n = q^n$ при $0 < q < 1$; б) $x_n = \frac{2^n}{n!}$.

24. Рассмотрим такую последовательность: $x_1 = 1$, $x_{n+1} = 1 - x_n$. Обозначим ее предел как a , тогда $a = 1 - a$, откуда $a = \frac{1}{2}$. Где ошибка?

25. Вычислите: а) $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}$; б) $\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3\dots}}}$.

26. Последовательность задана рекуррентным соотношением. Докажите, что она имеет предел, и найдите его.

а) $x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right)$, $x_1 = a > 1$; б) $x_{n+1} = \frac{1}{3} \left(2x_n + \frac{a}{x_n^2} \right)$.

27. Вычислите методом последовательных приближений а) $\sqrt{2}$; б) $\sqrt[3]{5}$ с точностью до сотых.

28. Последовательность задана рекуррентным соотношением: $x_1 = a$, $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n}$. Ограничена ли она?

29. Найдите $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{10}$.

Указание. Сначала докажите существование предела, а затем воспользуйтесь равенством $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{10} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2n]{10}$

30. Найдите $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n}$.

Указание. Угадайте, чему равен этот предел, затем вспомните определение предела.