Неравенства. Дополнительные Задачи.

Неравенства.

17. Докажите, что если a, b и c — длины сторон треугольника, то $abc \geq (a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)$. *(Удачной подстановкой эта задача сводится к уже доказанной задаче из листика).*

18. Докажите неравенство $a^4+b^4+c^4 \geq abc(a+b+c)$.

Варьирование

9. а) Известно, что $x_1>x_2$ и $y_1>y_2$. Что больше: $x_1y_1+x_2y_2$ или $x_1y_2+x_2y_1$?

   б) Докажите транс-неравенство: если $a_1\geq a_2\geq\ldots\geq a_n\geq 0$, $b_1\geq b_2\geq\ldots\geq b_n\geq 0$ и $c_1, c_2, \ldots, c_n$ – некоторая перестановка чисел $b_1, b_2, \ldots, b_n$, то
   $$a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n \geq a_1c_1+a_2c_2+\ldots+a_nc_n \geq a_1b_n+a_2b_{n-1}+\ldots+a_nb_1.$$

10. На плоскости даны несколько многоугольников и прямая. Среди всех прямых, параллельных данной, выбирается та, которая пересекает данные многоугольники по отрезкам с наибольшей суммой длин. Докажите, что она проходит через одну из вершин многоугольника.

Метод Штурма.

9. Сумма положительных чисел $a_1, a_2,\ldots, a_n$ равная 1. Докажите, что
   $$\left(1+\frac{1}{a_1}\right)\left(1+\frac{1}{a_2}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{a_n}\right) \geq (n+1)^n$$

10. Положительные числа $a_1, a_2,\ldots, a_n$, меньше 1. Докажите, что
   $$\left[a_1+\ldots+a_n\right]+\left\{a_1+\ldots+a_n\right\}^2 \geq a_1^2+\ldots+a_n^2.$$

11. *(Неравенство Гюйгенса)* Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ положительные числа, t их среднее геометрическое. Докажите неравенство $(1+a_1)(1+a_1)\ldots(1+a_n)\geq(1+t)^n$

Самостоятельная работа.

1. Для неотрицательных чисел a_1, a_2, ... a_n докажите неравенство $\frac{1}{1+a_1}+\frac{1}{1+a_2}+\ldots+\frac{1}{1+a_n}\geq\frac{n^2}{n+a_1+\ldots+a_n}$