

## Неравенства 1.

Свойства неравенств – транзитивность, сложение.

Свойство умножения – если  $a > b > 0$  и  $c > d > 0$ , то  $ac > bd$ .

Основные приемы:

- Рассмотреть разность левой и правой части.
- Использовать уже известные неравенства (например  $a^2 + b^2 \geq 2ab$ )

1. Докажите неравенства а)  $a^2 + 9b^2 \geq 6ab$  б)  $2a^2 + b^2 + c^2 \geq 2a(b+c)$  в)  $(a^3 - b^3)(a-b) \geq 3ab(a-b)^2$
2. (Важная!) Докажите, что сумма двух взаимно обратных положительных чисел не меньше, чем 2.
3. Докажите неравенства а)  $(ab^2 + a^3)(a-b) \geq (a^2b + b^3)(a-b)$  б)  $a^2 + \frac{1}{a^2} \geq a + \frac{1}{a}$
4. Для неотрицательных чисел  $a$  и  $b$  докажите  $a^3 + b^3 \geq a^2b + ab^2$
5. Для неотрицательных чисел  $a$  и  $b$  докажите  $a^5 + b^5 \geq a^4b + ab^4 \geq a^3b^2 + a^2b^3$
6. (Важная!) Для неотрицательных чисел  $a$  и  $b$  докажите  $\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$
7. Для неотрицательных чисел  $a$ ,  $b$  и  $c$  докажите  $\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} \geq 6$ .
8. Для неотрицательных чисел  $a$ ,  $b$  и  $c$  докажите  $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$ .
9. (Важная!) Докажите неравенство  $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$
10. Для неотрицательных чисел  $a$ ,  $b$  и  $c$  докажите  $\frac{(a+b+c)^2}{3} \geq ab + ac + bc$
11. Докажите, что если  $a \geq b$ , то  $a^3 - b^3 \geq |a^2b - ab^2|$
12. Найдите наименьшее значение выражения а)  $x + \frac{81}{x}$ , при  $x > 0$ . б)  $\frac{4x^2 - 7x + 25}{x}$ , при  $x > 0$
13. Найдите наибольшее значение выражения  $\frac{x}{16+x^2}$ , при  $x > 0$ .
14. Найдите наибольшее значение  $xy$ , если известно, что  $2x + y = 6$
15. а) Из всех прямоугольников площади  $S$  найдите прямоугольник с наименьшим периметром. б) Из всех прямоугольников периметра  $P$  найдите прямоугольник с наибольшей площадью.
16. Сумма  $n$  положительных чисел равна 1. Какое наибольшее значение может принимать их произведение?