

Инверсия.

Пусть на плоскости дана окружность S с центром O и радиусом R .

Определение. Инверсией относительно окружности S называется преобразование, которое сопоставляет произвольной точке A , отличной от O , точку A_1 , лежащую на луче $[OA)$ такую, что $|OA| \cdot |OA_1| = R^2$

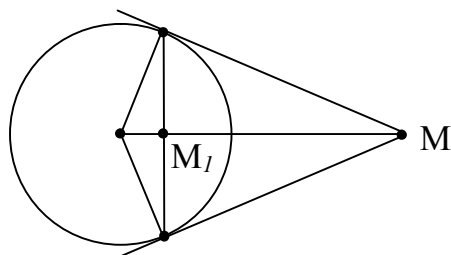
Окружность S называется окружностью инверсии, точка O называется центром инверсии, радиус R называется радиусом инверсии.

Свойства инверсии

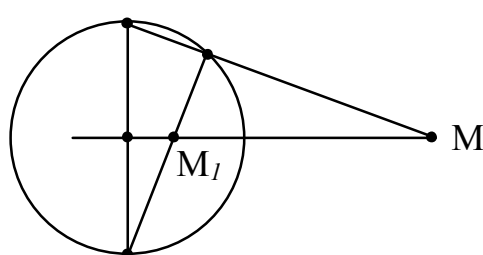
- Точки, расположенные на окружности инверсии, остаются на месте, расположенные внутри нее переходят вовне, а расположенные вне круга инверсии переходят во внутренние точки круга.
- Инверсия определена на всей плоскости кроме центра инверсии. Удобно рассматривать плоскость, пополненную бесконечно удаленной точкой - образом центра инверсии. Эта точка принадлежит всем прямым, замыкая их в окружности бесконечно большого радиуса.
- Инверсия является биекцией. Какое преобразование является обратным к инверсии?

1. Пусть при инверсии с центром в точке O точка A переходит в точку A_1 , а точка B – в точку B_1 . Докажите, что $\triangle OAB$ подобен $\triangle OB_1A_1$.
2. Сформулируйте и обоснуйте три способа построения (с помощью циркуля и линейки) образа точки при инверсии.

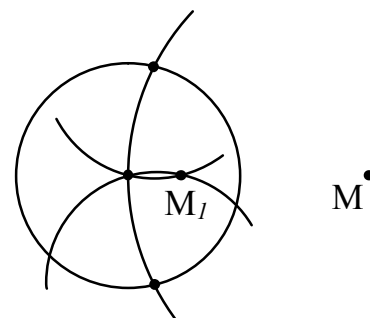
а)



б)



в)



Замечание. В пункте в) в построении линейка не используется

- При инверсии

- а) Прямые проходящие через точку O переходят в себя.
- б) Прямые не проходящие через O , переходят в окружности, проходящие через O .
- в) Окружности, проходящие через точку O переходят в прямые не проходящие через точку O .
- г) Окружности, не проходящие через точку O переходят в окружности, не проходящие через точку O .

3. Докажите свойства а), б), в) инверсии

4. Центр инверсии является точкой касания двух окружностей. Постройте образ этих окружностей при инверсии.
5. Дан равносторонний треугольник, одна вершина которого лежит в центре инверсии, а две другие – на ее окружности. Найдите образ треугольника при инверсии.
6. Дан квадрат, одна вершина которого совпадает с центром инверсии, а другая лежит на ее окружности. Постройте образ квадрата при инверсии.
7. Дан равносторонний треугольник, одна вершина которого лежит в центре инверсии, а противоположная сторона касается ее окружности. Найдите образ треугольника при инверсии.
8. Докажите свойство г): образом окружности, не проходящей через центр инверсии, является окружность. Верно ли, что центр окружности переходит в центр ее образа?

Построения.

9. (*Важная задача*) Докажите, что при инверсии касающиеся окружности переходят или в касающиеся окружности или в касающиеся окружность и прямую, или в пару параллельных прямых. То же для образа касающихся окружности и прямой или пары параллельных прямых.

Применения инверсии основаны на следующей идее: при помощи инверсии перевести точки, прямые и окружности из условия так, чтобы картинка стала наиболее простой (например, большинство окружностей стали прямыми).

10. Постройте с помощью циркуля и линейки окружность, касающуюся трех данных окружностей, имеющих общую точку.
11. Постройте окружность, проходящую через две данные точки и касающуюся данной окружности
12. Постройте окружность, касающуюся двух данных окружностей, причем одной из них в заданной точке.
13. Постройте окружность, проходящую через данную точку и касающуюся данной окружности и данной прямой.
14. Постройте окружность, проходящую через данную точку и касающуюся двух данных окружностей.
15. (*Задача Аполлония*) Постройте окружность, касающуюся трех данных непересекающихся окружностей.