

Геометрия (на каникулы).

1. В квадрат $ABCD$ вписан треугольник AMN (точки M и N лежат на сторонах CB и CD соответственно). Квадрат стерли, а треугольник остался. Восстановите квадрат.
2. Дан треугольник ABC . Впишите в него квадрат. (Квадрат вписан, если все четыре его вершины лежат на сторонах треугольника.)

Гомотетия.

Определение. Преобразование плоскости называется преобразованием подобия с коэффициентом k , если оно изменяет все расстояния в k раз. Иными словами, если X и Y – произвольные точки, а X_1 и Y_1 – их образы, то $X_1Y_1 = kXY$.

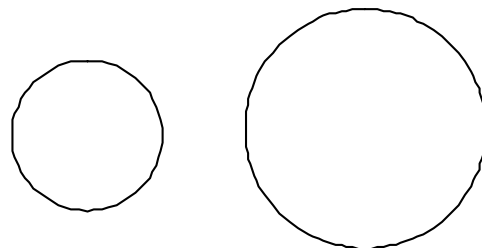
Определение. Гомотетией с центром в точке O и коэффициентом $k \neq 0$ называется преобразование плоскости, которое каждую точку M отображает на такую точку M_1 , что $\overline{OM_1} = k \cdot \overline{OM}$.

Свойства гомотетии.

- Гомотетия является биекцией.
- Гомотетия является преобразованием подобия с коэффициентом $|k|$.
- Гомотетия переводит прямую, в параллельную ей прямую.
- Гомотетия сохраняет величины углов.
- Гомотетия переводит окружности в окружности. При этом центр окружности переходит в центр. Касательные к окружности переходят в касательные к окружности.

Задачи на понятие гомотетии.

1. Докажите одно из приведенных выше свойств (по выбору преподавателя)
2. а) Даны два параллельных отрезка разной длины. Укажите гомотетию, которая переводит один из них в другой. б) Сколько существует таких гомотетий? Почему существенно, что длины отрезков разные?
3. а) Дан треугольник ABC . Обозначим середины сторон BC , AC , AB через A_1 , B_1 , C_1 соответственно. Придумайте гомотетию, которая переводит треугольник ABC в треугольник $A_1B_1C_1$.
б) Куда при этой гомотетии переходят точка пересечения медиан M и точка пересечения высот H ?
4. а) Две окружности расположены как на рисунке. Постройте центр гомотетии переводящей одну из них в другую. Найдите расстояния от центра гомотетии до центров окружностей.
б) То же самое, но для случая произвольного расположения окружностей.



Задачи на построение

5. Дана окружность и точка внутри нее. Постройте хорду, которая делится данной точкой в отношении 1:2.
6. а) Впишите квадрат в данный сектор. б) Каким числом способов это можно сделать.
7. Постройте треугольник по двум углам и периметру.
8. Дан треугольник ABC . На сторонах AB и BC построить точки M и N такие, что
а) $BM=MN=NC$ б) $AM=MN=NC$.

Задачи на доказательство.

9. Докажите, что в любом треугольнике центр O описанной окружности, точка пересечения медиан M и точка пересечения высот H лежат на одной прямой (*прямая Эйлера*).
В каком отношении одна из эти точек делит отрезок между другими?
10. На окружности фиксированы точки A и B , а точка C движется по этой окружности. Найти геометрическое место точек пересечения медиан треугольника ABC .
11. а) Пусть высоты треугольника ABC пересекаются в точке H . Рассмотрим следующие 9 точек: середины сторон, основания высот, середины отрезков AH , BH , CH . Докажите, что после гомотетии с центром в точке H и коэффициентом 2 эти точки попадут на описанную окружность.
б) Докажите, что исходные 9 точек лежали на одной окружности (эта окружность называется окружностью Эйлера или окружностью 9 точек)
в) Найдите радиус окружности 9 точек. Докажите, что центр этой окружности лежит на прямой Эйлера.
12. Круг, вписанный в сегмент, касается хорды и дуги в точках A и B соответственно C – середина другой дуги окружности. Докажите, что точки A, B, C лежат на одной прямой.

