

Функция Эйлера и Теорема Эйлера.

Определение. Пусть n – натуральное число. Количество чисел, взаимно простых с n и не больших n , обозначается $\varphi(n)$. Функция $\varphi(n)$ называется функцией Эйлера.

1. Найдите значение $\varphi(n)$ для первых 15 натуральных чисел.
2. а) Пусть p – простое число. Найдите $\varphi(p^k)$.
 б) Пусть p_1, p_2 – простые числа. Найдите $\varphi(p_1 p_2)$
 в). Пусть p_1, p_2, \dots, p_k – простые числа. Найдите $\varphi(p_1 p_2 \dots p_k)$.
3. а) Пусть m и n – взаимно простые числа. Рассмотрим таблицу $m \times n$ заполненную остатками от деления на mn (аналогично задаче 4 из листика Линейные Диофантовы уравнения)

| | | | | | | | |
|-------|---|---|---|--|--|--|-------|
| | 0 | 1 | 2 | | | | $n-1$ |
| 0 | | | | | | | |
| 1 | | 1 | | | | | |
| 2 | | | 2 | | | | |
| | | | | | | | |
| $m-1$ | | | | | | | |

Сколько чисел в этой таблице взаимно просто с m ? Где они располагаются?

б) Докажите, что функция Эйлера «мультипликативна», т.е. $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$ если $\text{НОД}(m, n) = 1$.

Замечание. Другими примерами мультипликативной функции являются сумма делителей и количество делителей.

4. Пусть $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}$. Найдите формулу для $\varphi(n)$. (Можно или использовать идею задачи 2 или задачу 3, а лучше придумать два доказательства)
5. Пусть $b_1, b_2, \dots, b_{\varphi(n)}$ - все возможные остатки по модулю n взаимно простые с n . Докажите, что если $\text{НОД}(a, n) = 1$, то числа $ab_1, ab_2, \dots, ab_{\varphi(n)}$ также дают все возможные остатки по модулю n взаимно простые с n
6. В задаче 11 листика Целые числа 3 была доказана малая Теорема Ферма $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ если p – простое число и a не кратно p . Придумайте и докажите обобщение этой теоремы на случай составного модуля n . (Скорее всего, получится теорема Эйлера)
7. Найдите остаток от деления 17^{81} на 75.
8. Докажите, что существует степень тройки которая оканчивается на ...00001.
9. а) Найдите количество несократимых дробей со знаменателем n .
 б) Найдите сумму всех несократимых дробей со знаменателем n .

10. На концах отрезка стоят по 1. За один ход между любыми двумя числами ставят сумму этих чисел. То есть на первом ходе напишут одну 2, на втором две 3 и т.д. Посчитайте для нескольких первых натуральных чисел сколько раз они встретятся на доске. (Хотя бы для чисел от 1 до 8). Подумайте на общем утверждении.