Уроки № 41-42 18-19.11.10

Дифференциальные уравнения.

---

1. Разбор домашнего задания

В задаче 8 ответ $y(t) = k(a - \frac{y}{2})(b - \frac{y}{2})$.

2. Решение дифференциального уравнения в задаче про радиоактивный распад:

Рассмотрим уравнение радиоактивного распада:

$$m' = -km.$$

Попробуем угадать решение. Путем подбора нашли, что функции вида Ce^{-kt} подходят. Докажем, что других нет. Пусть есть некоторое решение $m(t)$. Пусть $u(t) = m(t)e^{kt}$, тогда $m(t) = u(t)e^{-kt}$. Подставим эту формулу в исходное уравнение:

$$\left(u(t)e^{-kt}\right)' = -ku(t)e^{-kt},$$

откуда $u'(t)e^{-kt} - ke^{-kt}u(t) = -ku(t)e^{-kt}$ или $u'(t)e^{-kt} = 0$. Отсюда следует, что $u(t) = const$. Таким образом, мы получили зависимость массы от момента времени для радиоактивного распада:

$$m(t) = Ce^{-kt}.$$

Здесь константа k зависит от вида вещества, а вот от чего зависит C? Допустим, нам известно, что в момент времени $t = 0$ масса вещества равнялась m_0. Тогда выполнено следующее *начальное условие*:

$$m(0) = m_0$$

Значит, $Ce^{-k\cdot 0} = m_0$, откуда $C = m_0$. Таким образом, полное решение задачи про радиоактивный распад выглядит так:

$$m(t) = m_0e^{-kt}.$$

Замечание: мы часто пользуемся тем, что функция, производная которой равна тождественно нулю, является константой. Это утверждение доказывалось нами с помощью теоремы Лагранжа:

Если функция $y = f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, дифференцируема на $(a;b)$, то существует $x_0 \in (a;b)$ такой, что

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

3. Решение дифференциальных уравнений. Определения.

***Определение* 1.** *Решением* дифференциального уравнения называется функция, при подстановке которой в это уравнение получается тождество.

***Определение* 2.** График решения дифференциального уравнения называют *интегральной кривой* этого уравнения.

Рассмотрим интегральные кривые в задаче про радиоактивный распад. Видно, что через каждую из точку плоскости проходит по одной интегральной кривой (ось абсцисс получается при $C = 0$).

***Определение* 3.** Функцию $y = \varphi(x, C)$, где C — произвольная постоянная, называют *общим решением* дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$ в области Ω, если

а) для любого допустимого C выполнено

$$\varphi'(x)_c = f(x, \varphi(x)_c)$$

б) для любой точки $M_0(x_0, y_0)$ из области Ω существует единственное значение C_0, при котором интегральная кривая $y = \varphi(x)_{c_0}$ проходит через точку M_0.

Дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$ — это обычное дифференциальное уравнение 1-го порядка, записанное так, что в левой части находится неизвестная производная y', а в правой части встречаются только переменная x и неизвестная функция y, т. е. в правой части записано некоторое выражение, в котором встречаются x и y. Для краткости это обозначено $f(x, y)$. Например, уравнение $y' = -ky$, здесь $f(x, y) = f(y) = -ky$ или $f(x, y) = -ky + 0 \cdot x$.

Функция $\varphi(x, C)$, где C — произвольная постоянная, это просто некоторая функция, в которой кроме переменной есть еще и произвольная постоянная, например Ce^{-kx}.

Условие а) означает вот что. Возьмем конкретное значение C и подставим его в функцию $y = \varphi(x, C)$. При этом мы получим одну определенную функцию $\varphi(x)$. Эта функция должна являться решением дифференциального уравнения, т. е. при подстановке в исходное уравнение должна обращать его в тождество. Например, для $\varphi(x, C) = Ce^{-kx}$ при $C = 2$ получим $\varphi(x) = 2e^{-kx}$, и если подставить это в уравнение $y' = -ky$ вместо y, получим тождество.

Условие б) для задачи про радиоактивный распад выполнено для всей плоскости, т. е. в этом случае $\Omega = \mathbb{R}^2$. Условие б) позволяет решать конкретные задачи. Если нам дано дифференциальное уравнение в виде $y' = f(x, y)$ и задано условие, что $y(x_0) = y_0$, если мы найдем общее решение, то с помощью подстановки конкретных значений x_0 и y_0 сможем явно указать значение произвольной постоянной и найти единственную функцию.

***Определение* 4.** Решение дифференциального уравнения, получаемое из общего решения путем придания определенного значения произвольной постоянной, называют *частным решением* этого уравнения.

Как правило, при решении практических задач возникает необходимость найти именно частное решение. Например, в задаче про вытекание воды из бочки, чтобы получить ответ, нужно найти конкретную функцию $h(t)$, тогда можно будет решить алгебраическое уравнение $h(t) = 0$ и найти t. Чтобы найти конкретную функцию, надо воспользоваться начальным условием, данным в задаче: $h(0) = H$.

Определения общего и частного решений дифференциального уравнения порядка выше единицы, а также дифференциального уравнения, в котором нельзя явно выразить производную (например, $(y')^2 + y^2 = 1$) мы писать не будем, они аналогичны, но формулировка получится более сложной.

4. Решение дифференциальных уравнений.

1) Найдите общее решение уравнения $y' = f(x)$.

Решение: Возьмем интеграл от обеих частей, получим

$$y(x) = \int f(x)dx + C$$

Заметим, что уравнение $y^{(n)} = f(x)$ решается тем же способом, только интеграл придется брать n раз, и решение будет зависеть от n произвольных постоянных.

2) Угадайте общее решение уравнения $y' = \frac{y}{x}$. Докажите, что других решений нет. Найдите частное решение этого уравнения при начальном условии $y(1) = -2$. Постройте интегральные кривые.

Решение: легко заметить, что функции вида $y = Cx$ подходят. Докажем, что других нет. Пусть $y(x)$ — решение, представим его в виде $y(x) = u(x)x$. Подставляя это выражение в исходное уравнение, получим, что $u'(x)x = 0$, а поскольку x не является тождественным нулем, то $u(x) = const$. Таким образом, общее решение $y = Cx$ и его интегральные кривые — прямые, проходящие через начало координат. При этом ось ординат не входит в область Ω, т. к. ее не пересекает ни одна из интегральных кривых.

Поскольку $y(1) = -2$, то $C = -2$, и частное решение будет $y = -2x$.

3) Уравнение гармонических колебаний выглядит так (вспомните задачу про шарик на пружинке):

$$x'' + \omega^2 x = 0.$$

Покажите, что функция $x = C_1 \cos\omega t + C_2 \sin\omega t$ является его решением при любых C_1, C_2 и найдите частное решение при начальных условиях $x(0) = x_0$, $v(0) = v_0$.

Решение. Найдем вторую производную и убедимся, что данная функция обращает уравнение в тождество. Исходя из начальных условий, запишем систему уравнений:

$$\begin{cases} x(0) = C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 = x_0; \\ x'(0) = -C_1 \sin 0 + C_2 \cos 0 = v_0. \end{cases}$$

Решив систему, получим частное решение

$$x(t) = x_0 \cos\omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin\omega t.$$

4) Придумайте способ решения задачи $y' = \varphi(x)\psi(y)$, если $\psi(y) \neq 0$.

Решение: Поделим обе части на $\psi(y)$, получим

$$\frac{y'}{\psi(y)} = \varphi(x)$$

Возьмем интеграл от обеих частей, получим

$$\int \frac{dy}{\psi(y)} = \int \varphi(x)dx + C$$

Если мы вычислим интегралы, то получим уравнение, не содержащее производных, и дальше будем решать это уравнение.

5. Домашнее задание

1) Рассмотрим движение материальной точки по прямой с постоянным ускорением a. Пусть $x(t)$ — зависимость координаты точки от времени. Составьте дифференциальное уравнение для $x(t)$ и найдите его общее решение. Найдите частное решение при начальных условиях

$$\begin{cases} x(0) = x_0; \\ v(0) = v_0. \end{cases}$$

2) Приведите частное решение из задачи 3 к виду $x(t) = A\sin(\omega t + \alpha)$ (укажите явно значения A и α).

3) Решите задачу про бочку, считая, что коэффициент для формулы скорости для воды равен $0,6$. Воспользуйтесь задачей 4 и найдите общее решение $h(t)$ при $h(t) > 0$. Докажите, что полученная формула справедлива и при $h(t) \geqslant 0$ для конкретной физической задачи. Сделайте прикидку, проведите грубые вычисления и получите ответ задачи с точностью до часов.

4) Найдите общее решение уравнения гармонических колебаний. Для этого воспользуйтесь формулой $v = x'$, приведите уравнение к виду $v' = \ldots$ и домножьте левую часть на v, а правую на x'. Возьмите интегралы от обеих частей и получите уравнение первого порядка. Считая, что правая часть не обращается в нуль, решите это уравнение согласно задаче 4.