Уроки №35-36 28-29.10.10

Интегрирование по частям.

---

1. Разбор домашнего задания.

1) — дважды интегрирование по частям (внесение e^x под знак дифференциала); ответ $e^x(2x^2-3x+4)+C$.

2) — по частям (внесение синуса под знак дифференциала); ответ $\frac{\sin 5x}{25}-\frac{(x+1)\cos 5x}{5}+C$.

3) — разложение на сумму двух интегралов, первый берется непосредственно, во втором замена $t=1-x^2$; ответ $\arcsin x-2\sqrt{1-x^2}+C$.

4) — упрощение тригонометрического выражения (подынтегральная функция равна $4\operatorname{ctg}^2 2x$), выражение через квадрат синуса и разбиение на сумму двух интегралов; ответ $2\operatorname{ctg}2x-4x+C$.

5) — замена $t=\sqrt{x^2+1}$; ответ $\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1}+C$.

2. Решение задач.

1) Вычислите $\int\frac{dx}{1+x^2}$ с помощью замены переменной $t=\frac{1}{x}$. Постройте график верной первообразной и график первообразной, получившейся в результате замены. Объясните, почему второй способ в данном случае не работает.

2)

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\cos^2 x}, & \text{при } -\dfrac{\pi}{2}<x<0;\\ \dfrac{1}{1+x^2}, & \text{при } x\geqslant 0.\end{cases}$$

Найдите первообразную этой функции, график которой проходит через точку $M(1;\frac{\pi}{2})$ и постройте этот график.

Запишем решение подробно:

$D(f)=(-\frac{\pi}{2},+\infty)$. $f(0)=1$, $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1\Rightarrow f(x)$ – непрерывна на $D(f)$. Значит, любая первообразная непрерывна на $D(f)$.

$$\int f(x)dx=\begin{cases}\operatorname{tg}x+C_1, & \text{при } -\dfrac{\pi}{2}<x<0;\\ \operatorname{arctg}x+C_2, & \text{при } x\geqslant 0;\end{cases}$$

где C_1, C_2 такие, что $\operatorname{arctg}0+C_2=\lim\limits_{x\to 0-0}(\operatorname{tg}x+C_1)\Leftrightarrow C_1=C_2$.

Т. к. график $F(x)$ проходит через точку $(1;\frac{\pi}{2})$, то $F(1)=\frac{\pi}{2}$. Поэтому

$$F(x)=\begin{cases}\operatorname{tg}x+\dfrac{\pi}{4}, & \text{при } -\dfrac{\pi}{2}<x<0;\\ \operatorname{arctg}x+\dfrac{\pi}{4}, & \text{при } x\geqslant 0;\end{cases}$$

При построении графика первообразной надо иметь ввиду, что производная существует на всей области определения, в том числе и в точке 0: $F'(0) = 1$. Поэтому в точке при $x = 0$ есть касательная с тангенсом угла наклона, равным единичке.

3) Дана функция $f(x) = \sqrt{3}x + 3\ln(x-2)$. Пусть $F(x)$ и $G(x)$ — её первообразные, проходящие через точки $K(3;9)$ и $T(3;-1)$ соответственно. Найдите расстояние между касательными к графикам первообразных, проведенными в этих точках.

Решение. Касательные к графикам определяются формулами

$y - F(x_0) = F'(x_0)(x - x_0)$ и $y - G(x_0) = G'(x_0)(x - x_0)$.

Заметим, что $F'(x) = G'(x) = f(x)$, а $x_0 = 3$, таким образом, уравнения касательных можно явно выписать: $y = 3x$ и $y = 3x - 10$. Далее можно легко найти из геометрических соображений, что расстояние равно $\sqrt{10}$.

3. Самостоятельное решение задач.

Вычислите интегралы:

1) $\displaystyle\int \frac{xdx}{3-2x^2}$;	6) $\displaystyle\int \sin x \ln(\cos x)dx$;	11) $\displaystyle\int x^5 e^{x^3}dx$;
2) $\displaystyle\int \frac{e^x dx}{2+e^x}$;	7) $\displaystyle\int e^{2x}\sin 2x dx$;	12) $\displaystyle\int \arcsin^2 x dx$;
3) $\displaystyle\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$;	8) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}}$;	13) $\displaystyle\int e^{\sqrt{x}}dx$;
4) $\displaystyle\int \ln^2 x dx$;	9) $\displaystyle\int \frac{\ln^2 x dx}{x}$;	14) $\displaystyle\int x^2 \ln\frac{1-x}{1+x}dx$;
5) $\displaystyle\int \arcsin x dx$;	10) $\displaystyle\int \frac{dx}{3x^2-2x-1}$;	15) $\displaystyle\int \frac{x^2dx}{(1+x^2)^2}$.

4. Домашнее задание

16) График одной из первообразных функции $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ проходит через точку $A(1;2)$, а другой — через точку $B(8;4)$. Каким преобразованием получается первый из второго?

Решите задачи, не решенные в классе.