Уроки №17-18 28-29.09.10

Самостоятельная работа. Логарифмические и показательные уравнения и неравенства.

1. Самостоятельная работа №3. (45 минут)

I вариант

1) Вычислите: $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{4-\sqrt{x+15}}{2\sqrt{x}-\sqrt{5-x^2}}$.

Решите уравнения:

2) $\sqrt{6-\sqrt{x^2+4x+4}}-x=2$;

3) $\sqrt{3-2\cos x}=-\sqrt{3}\sin x$;

4) $\sqrt{3x^2-6x+7}+x^2=2x+7$;

5) $\sqrt[3]{x-2}+\sqrt{x-3}+1=0$.

Решите неравенства:

6) $x-3<\sqrt{x^2-4x}$; 7) $\sqrt[5]{x}-\sqrt[5]{x-1}\leqslant 1$.

II вариант

1) Вычислите: $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{x^2-12}}{\sqrt{1+2x}-3}$.

Решите уравнения:

2) $2+\sqrt{3-\sqrt{x^2-2x+1}}=x$;

3) $\sqrt{4-3\sin x}=-2\cos x$;

4) $-\sqrt{-1-x}=\sqrt[3]{x-5}-2$;

5) $\sqrt{2x^2-5x+4}-2,5x+0,5=-x^2$;

6) $\sqrt{3x^2-1}+\sqrt{x^2-x+1}=\sqrt{3x^2+2x+1}+\sqrt{x^2+2x+4}$.

7) Решите неравенство: $\sqrt{x^2+x-2}>x$.

2. Решение логарифмических и показательных уравнений и неравенств.

При решении логарифмических и показательных уравнений необходимо помнить, что для a^b, где $b\in\mathbb{R}$, выполнено, что $a>0$, для $\log_a b$ выполнено, что $a>0$, $b>0$, $a\neq1$. Также ввиду монотонности функций a^x, $\log_a x$ можно легко сравнивать между собой значения аргументов и рассуждать о количестве решений соответствующих уравнений.

Примеры.

1) $2^{x+2}-2^{x+3}-2^{x+4}>5^{x+1}-5^{x+2}\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2^{x+2}(1-2-4)>5^{x+1}(1-5)\Leftrightarrow 2^x<5^x\Leftrightarrow\left(\frac{5}{2}\right)^0<\left(\frac{5}{2}\right)^x\Leftrightarrow x>0.$

2) $6^{3x-2}\leqslant 2^{2x}\cdot3^{5x-6}\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2^{3x-2}\cdot3^{3x-2}\leqslant 2^{2x}\cdot3^{5x-6}\Leftrightarrow 2^{x-2}\leqslant 3^{2x-4}\Leftrightarrow 2^{x-2}\leqslant 9^{x-2}\Leftrightarrow x\geqslant 2.$

3) $3^x \cdot \sqrt{x+0,9} \cdot (3+2x-x^2)\left(4^{\sin^2 x}-2\right)^2 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x+0,9>0; \\ 3+2x-x^2<0; \\ \left(4^{\sin^2 x}-2\right)^2 \neq 0. \end{cases}$

Ответ: $(-0,9;3) \setminus \{-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\}$

4) $3^{x-1}+5^{x-1} < 34 \Leftrightarrow x < 3$, поскольку $3^{x-1}+5^{x-1}$ монотонно возрастает, и $3^2+5^2=34$.

5) $\lg(2^x+1)+x(2-\lg 50) = \lg 3 - \lg 5 - 0,5\log_{\frac{\sqrt{2}}{2}} 2$.

Поскольку $2-\lg 50 = \lg 2$, $0,5\log_{\frac{\sqrt{2}}{2}} 2 = -1$, $\lg 3 - \lg 5 + 1 = \lg 6$, получаем $\lg(2^x+1)+\lg 2^x = \lg 6$, откуда $(2^x+1)\cdot 2^x = 6$. Далее замена $2^x = t$, и нужно решить квадратное уравнение.

6) $|x-1|^{\log_4 x} = 2^{3(\log_4 x+3)} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} |x-1| \neq 0; \\ x>0; \\ \log_4\left(|x-1|^{\log_4 x}\right) = \log_4\left(2^{3(\log_4 x+3)}\right). \end{cases}$

Решение последнего уравнения системы сводится к квадратному заменой $t = \log_4 x$.

7) $\log_{x^2+6x+8}\left(\log_{2x^2+2x+3}(x^2-2x)\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2+6x+8>0; \\ x^2+6x+8 \neq 1; \\ \log_{2x^2+2x+3}(x^2-2x) = 1. \end{cases}$

Дальше аналогично решается второе уравнение, и потом выполняется проверка всех условий.

8) $\log_{x-1}\left(1+2x^4-x^6\right) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x-1>0; \\ x-1 \neq 1; \\ 1+2x^4-x^6>0; \\ (x-1-1)(1+2x^4-x^6-1)<0. \end{cases}$

Последнее неравенство решается методом интервалов, а третье неравенство можно решить, например, с помощью производной и нахождения экстремумов на полученных промежутках.

3. Домашняя работа.

Решить неравенства:

1) $5^{\sin(\pi x)} + 5^{1-\sin(\pi x)} \geqslant 6$;

2) $6\sqrt[x]{9} - 13\sqrt[x]{6} + 6\sqrt[x]{4} \leqslant 0$;

3) $3\log_2^2 \sin x + \log_2(1-\cos 2x) < 2$;

4) $\frac{1}{4}x^{0,5\log_2 x} \geqslant 2^{\log_2^2 \sqrt{x}}$;

5) $1+3^{\frac{x}{2}} \geqslant 2^x$;

6) $2^{\cos x} - |x| + \sqrt{x^2+|\cos x|^{-1}-1} \leqslant 0,5$.