

Самостоятельная работа. Иррациональности.**1. Самостоятельная работа №2. (45 минут)****I вариант**

Даны функции:

$$f(x) = \frac{\ln^2 x + 3x + 1}{\ln x + 5x - 1}; \quad g(x) = (\cos^2 2x - 0,25)^\pi; \quad h(x) = x^2 e^{-x}.$$

- 1) Вычислите $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. 2) Найдите $g'(x)$. 3) Найдите $D(g)$.
- 4) В конус, направляющая которого в два раза больше радиуса r , вписан цилиндр. В каких границах может быть площадь его осевого сечения?
- 5) Исследуйте функцию $h(x)$ и постройте ее график.

II вариант

Даны функции:

$$f(x) = \frac{4^x + 2^x - x^2}{4^{x-1} - 2^x + 3x^3}; \quad g(x) = \left(\frac{3}{4} - \sin^2 2x\right)^{\sqrt{2}}; \quad h(x) = x^2 \ln x.$$

- 1) Вычислите $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. 2) Найдите $g'(x)$. 3) Найдите $D(g)$.
- 4) Около шара радиуса r описан конус. В каких границах может быть площадь его осевого сечения?
- 5) Исследуйте функцию $h(x)$ и постройте ее график.

2. Решение задач

- 1) Вычислите: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x + 1) (\sqrt{9x^2 + 2} - 3x)$.

Ответ: $\frac{2}{3}$ (нужно домножить на сопряженное).

Сравните:

$$2) \sqrt{2008} + \sqrt{2011} \text{ и } \sqrt{2009} + \sqrt{2010}; \quad 3) e^\pi \text{ и } \pi^e.$$

Комментарии: корни можно сравнивать возведением в квадрат, домножением разности на сопряженное, или исследованием функции $\sqrt{x+1} - \sqrt{x}$ с помощью производной. В третьей задаче можно исследовать функцию $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$ (чтобы сравнить $e^{\frac{1}{e}}$ и $\pi^{\frac{1}{\pi}}$) или $g(x) = \frac{e^x}{x^e}$.

3. Решение уравнений с радикалами

Устно: решите уравнения:

$$\begin{array}{lll}
1) \sqrt{x-7} + 2 = \sqrt{5-x}; & 4) \sqrt{2x+15} + \sqrt{x-5} = -2; & 7) \sqrt{x} + \sqrt{x+10} = 3; \\
2) \sqrt{5-x^2} - \sqrt{\frac{1}{3}x-1} = 4; & 5) \sqrt{x-3} + \sqrt{x^2-4} = 0; & 8) \sqrt{2-x} = \sqrt[3]{x-3}; \\
3) 3\sqrt{x-1} - 4\sqrt{1-x} = \frac{2}{x-1}; & 6) \frac{\sqrt[4]{x^3-8} + \sqrt{x^2-4}}{2-x} = 0; & 9) \sqrt{17 + \sqrt{x^2-x}} = 4 - x^2.
\end{array}$$

Ответ: везде нет решений.

Самостоятельно в тетрадах: преобразуйте уравнение в эквивалентную систему, не содержащую радикалов:

$$1) \sqrt{f(x)} = g(x); \quad 2) \sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} = C; \quad 3) \sqrt{f(x)} - \sqrt{g(x)} = C.$$

Ответ: в первой задаче

$$\begin{cases} f(x) = g(x)^2; \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$$

Во второй задаче есть три случая, в зависимости от C :

если $C < 0$, то $x \in \emptyset$;

если $C = 0$, то $f(x) = g(x) = 0$;

если $C > 0$, то

$$\begin{aligned}
\sqrt{f(x)} = C - \sqrt{g(x)} & \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x)^2 + C^2 - 2\sqrt{g(x)}; \\ C - \sqrt{g(x)} \geq 0. \end{cases} \Leftrightarrow \\
\begin{cases} 2\sqrt{g(x)} = g(x)^2 + C^2 - f(x); \\ 0 \leq g(x) \leq C^2. \end{cases} & \Leftrightarrow \begin{cases} 4g(x) = (g(x)^2 + C^2 - f(x))^2; \\ g(x)^2 + C^2 - f(x) \geq 0; \\ 0 \leq g(x) \leq C^2. \end{cases}
\end{aligned}$$

В третьей задаче получаем:

$$\begin{aligned}
\sqrt{f(x)} = C + \sqrt{g(x)} & \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x)^2 + C^2 + 2\sqrt{g(x)}; \\ C + \sqrt{g(x)} \geq 0. \end{cases} \Leftrightarrow \\
\begin{cases} 2\sqrt{g(x)} = f(x) - g(x)^2 - C^2; \\ C + \sqrt{g(x)} \geq 0. \end{cases} & \Leftrightarrow \begin{cases} 4g(x) = (f(x) - g(x)^2 - C^2)^2; \\ f(x) - g(x)^2 - C^2 \geq 0; \\ C + \sqrt{g(x)} \geq 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

Неравенство $C + \sqrt{g(x)} \geq 0$ равносильно, в зависимости от знака C , либо $g(x) \geq 0$, либо $g(x) \geq -C$.

4. Домашнее задание

Если Ваша оценка за самостоятельную работу 3– или ниже, или Вы пропустили самостоятельную работу, нужно выполнить другой вариант, подробно написать решения всех задач, и принести его.

Кроме этого, всем три уравнения:

$$1) \sqrt{1+3x} = x-1; \quad 2) 3\sqrt{x+3} - \sqrt{x-2} = 7; \quad 3) 3\sqrt{\frac{x}{x-1}} = 3\sqrt{1-\frac{1}{x}} + 2,5.$$