Группы. Некоторые примеры и обозначения.

10 математический класс **4 октября 2010 года**

1) Докажите, что для любого натурального $n > 1$ ненулевые остатки по модулю n образуют (абелеву) группу с операцией сложения. Эта группа обозначается $\mathbb{Z}_n$ или $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

2) Докажите, что числа 1, 2, 3, 4, 5, 6 с операцией умножения по модулю 7 образуют группу. Изоморфна ли она группе Z_6?

3) Число элементов в группе может быть и бесконечным. Докажите, например, что все целые числа с операцией сложения образуют группу. Эта группа обозначается просто $\mathbb{Z}$. Образуют ли группу по сложению целые неотрицательные числа? Образуют ли целые числа группу по умножению?

4) Докажите, что положительные действительные числа образуют группу по умножению. Эта группа обозначается $\mathbb{R}^*_+$. Докажите, что все действительные числа образуют группу по сложению ($\mathbb{R}$), а все ненулевые — по умножению ($\mathbb{R}^*$). Догадайтесь, какие группы скрываются за обозначениями $\mathbb{Q}^*_+$, $\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{C}^*$, $\mathbb{C}$.

Пусть в группе G с некоторой операцией выделено подмножество H. Если оно само образует группу по той же операции, говорят, что H — ***подгруппа*** в группе G. Это записывают как $H \leqslant G$.

4) Докажите, что целые числа, кратные натуральному k, образуют подгруппу в группе $\mathbb{Z}$. Эта группа обозначается $k\mathbb{Z}$. Изоморфны ли $\mathbb{Z}$ и $k\mathbb{Z}$?

5) Группа всех перестановок из n элементов обозначается S_n и является (при $n > 2$) важнейшим примером неабелевой конечной группы. Докажите, что чётные перестановки из $n > 2$ элементов составляют подгруппу в S_n. Эта подгруппа обозначается A_n. Сколько элементов в S_n и сколько в A_n? Абелева ли A_n?

6) Докажите, что в $\mathbb{Q}^*$ и $\mathbb{Q}$ есть подгруппа, изоморфная $\mathbb{Z}_2$, а в $\mathbb{Q}^*_+$ такой нет.

7) Опишите группу самосовмещений отрезка. Докажите, что в ней 4 элемента, но она не изоморфна $\mathbb{Z}_4$. Эта группа обозначается V_4.

10 математический класс **4 октября 2010 года**

Группы. Некоторые примеры и обозначения.

1) Докажите, что для любого натурального $n > 1$ ненулевые остатки по модулю n образуют (абелеву) группу с операцией сложения. Эта группа обозначается $\mathbb{Z}_n$ или $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

2) Докажите, что числа 1, 2, 3, 4, 5, 6 с операцией умножения по модулю 7 образуют группу. Изоморфна ли она группе Z_6?

3) Число элементов в группе может быть и бесконечным. Докажите, например, что все целые числа с операцией сложения образуют группу. Эта группа обозначается просто $\mathbb{Z}$. Образуют ли группу по сложению целые неотрицательные числа? Образуют ли целые числа группу по умножению?

4) Докажите, что положительные действительные числа образуют группу по умножению. Эта группа обозначается $\mathbb{R}^*_+$. Докажите, что все действительные числа образуют группу по сложению ($\mathbb{R}$), а все ненулевые — по умножению ($\mathbb{R}^*$). Догадайтесь, какие группы скрываются за обозначениями $\mathbb{Q}^*_+$, $\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{C}^*$, $\mathbb{C}$.

Пусть в группе G с некоторой операцией выделено подмножество H. Если оно само образует группу по той же операции, говорят, что H — ***подгруппа*** в группе G. Это записывают как $H \leqslant G$.

4) Докажите, что целые числа, кратные натуральному k, образуют подгруппу в группе $\mathbb{Z}$. Эта группа обозначается $k\mathbb{Z}$. Изоморфны ли $\mathbb{Z}$ и $k\mathbb{Z}$?

5) Группа всех перестановок из n элементов обозначается S_n и является (при $n > 2$) важнейшим примером неабелевой конечной группы. Докажите, что чётные перестановки из $n > 2$ элементов составляют подгруппу в S_n. Эта подгруппа обозначается A_n. Сколько элементов в S_n и сколько в A_n? Абелева ли A_n?

6) Докажите, что в $\mathbb{Q}^*$ и $\mathbb{Q}$ есть подгруппа, изоморфная $\mathbb{Z}_2$, а в $\mathbb{Q}^*_+$ такой нет.

7) Опишите группу самосовмещений отрезка. Докажите, что в ней 4 элемента, но она не изоморфна $\mathbb{Z}_4$. Эта группа обозначается V_4.