Перпендикулярность прямой и плоскости

Определение. ***Прямая** называется **перпендикулярной плоскости**, если она перпендикулярна любой прямой, лежащей в этой плоскости.*

Признак перпендикулярности прямой и плоскости. *Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна этой плоскости.*

125.Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, O – центр грани CC_1D_1D. Верно ли, что: а) $C_1D\perp A_1D_1$; б) $C_1D\perp A_1C$; в) $C_1D\perp BO$? г) Опустите из точки A_1 перпендикуляр на плоскость BDC_1.

126.ABCD – правильный тетраэдр (то есть все его ребра равны друг другу), O – центр треугольника ABC. Докажите, что А) $DC\perp AB$; б) $DO\perp AB$; в) $DO\perp ABC$.

Правильные пирамида и призма

Определение. ***Высотой** пирамиды называется отрезок перпендикуляра, проведенного из вершины пирамиды к плоскости ее основания, заключенный между вершиной и плоскостью основания. Общая точка высоты пирамиды и плоскости основания называется **основанием высоты** пирамиды.*

127.Докажите эквивалентность двух определений правильной пирамиды:
Определение 1. Правильной называется пирамида, основанием которой является правильный многоугольник, а все боковые ребра равны между собой.
Определение 2. ***Правильной** называется **пирамида**, в основании которой лежит правильный многоугольник, а основанием высоты пирамиды является центр этого многоугольника.* (Именно это определение и является общепринятым).

Определение. ***Призма** называется **правильной**, если ее основанием является правильный многоугольник, а боковые ребра перпендикулярны основанию.*

Построение плоскости, перпендикулярной данной прямой

Теорема существования и единственности. *Через данную точку можно провести плоскость, перпендикулярную данной прямой, и притом единственную.*

128.Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через середину диагонали AC_1 и перпендикулярной ей. Определите вид сечения.

129.Постройте сечение правильной треугольной пирамиды SABC плоскостью, перпендикулярной высоте CC_1 основания ABC и проходящей через середину ребра AS. Найдите, в каком отношении это сечение делит площадь основания пирамиды.

130.На ребре AC правильной призмы $ABCA_1B_1C_1$, у которой $AA_1 = AB$, задана точка P – середина этого ребра. Постройте сечение призмы плоскостью, проходящей через точку P перпендикулярно прямой BC_1, и определите, в каких отношениях оно делит ребра призмы.

131.Все ребра правильной четырехугольной пирамиды SABCD имеют длину 2. Точки M и N – середины ребер AS и AB соответственно. Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точку M перпендикулярно прямой CN, и найдите площадь этого сечения.

132.В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ отношение ребер $AB : AD : AA_1 = 1 : 2 : 1$. Опустите перпендикуляр из точки M – середины ребра AD – на отрезок B_1C и вычислите, в каком отношении основание перпендикуляра делит этот отрезок.

Построение перпендикуляра к плоскости. Перпендикулярные плоскости

Теорема. *Если плоскость α содержит перпендикуляр к плоскости β, то плоскость β содержит перпендикуляр к плоскости α.*

«Определение» (если честно, то это признак). ***Плоскости** называются **перпендикулярными**, если одна из них содержит перпендикуляр к другой.*

Теорема существования и единственности. *Через данную точку можно провести прямую, перпендикулярную данной плоскости, и притом единственную.*

Чтобы провести через точку A перпендикуляр к плоскости α, следует:
1) выбрать в плоскости α произвольную прямую l;
2) провести через точку A плоскость β, перпендикулярную l; при этом $\beta\perp\alpha$;
3) опустить из точки A перпендикуляр на линию пересечения плоскостей α и β.

133.Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром a. Точка M – середина ребра AA_1. а) Опустите перпендикуляр из точки A_1 на плоскость MB_1D_1 (выполните точное построение) и найдите угол между ним и прямой A_1M. б) Опустите перпендикуляр на эту же плоскость из точки C и найдите его длину.

134.Сторона основания правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна $2a$, а боковое ребро равно a. Точка D – середина ребра AB. Постройте перпендикуляр из точки A_1 к плоскости B_1CD и найдите его длину.

Связь между параллельностью и перпендикулярностью

Теорема 1. *Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна данной плоскости, то и вторая прямая перпендикулярна этой плоскости.*

Теорема 2. *Если две плоскости перпендикулярны одной прямой, то они параллельны.*

Теорема 3. *Если две прямые перпендикулярны плоскости, то они параллельны.*

Теорема 4. *Если прямая перпендикулярна одной из двух параллельных плоскостей, то она перпендикулярна и другой плоскости.*

135.Основанием пирамиды MABCD является квадрат ABCD со стороной a. Ребро MB имеет ту же длину и перпендикулярно плоскости основания. P – середина ребра MB. Опустите перпендикуляры на плоскость PAD из точек B и M и найдите их длины.

Домашнее задание

136.Из точки M проведен перпендикуляр MB к плоскости прямоугольника ABCD. а) Докажите, что треугольник AMD прямоугольный. б) Перпендикулярны ли прямые MD и AC?

137.Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром a. Точка M – середина AD. а) Проведите через точку M плоскость, перпендикулярную прямой A_1C_1; б) Опустите из точки M перпендикуляр на эту прямую и найдите его длину. в) Точка N – середина CC_1. Найдите расстояние от точки N до прямой B_1D.

138.Через центр основания правильного тетраэдра проведите сечение, перпендикулярное его боковому ребру. Определите, в каких отношениях делит оно ребра тетраэдра.

139.В пирамиде ABCD даны ребра : AB = 7, BC = 8, CD = 4. Найдите ребро DA, если известно, что прямые AC и BD перпендикулярны.

140.Отношение бокового ребра правильной призмы $ABCA_1B_1C_1$ к стороне ее основания равно $\sqrt{3} : 2$. Опустите перпендикуляр на плоскость ABC_1 из точки C и найдите его длину.

141.В правильном тетраэдре PABC с ребром 2 точка M – середина ребра PC. а) Через центроид грани ABP проведите прямую, перпендикулярную плоскости ABM. б) Найдите длину отрезка этой прямой внутри тетраэдра. в) Найдите отношение, в котором плоскость ABM делит данный отрезок.

Ортогональная проекция и наклонная. Теорема о трех перпендикулярах.

Теорема о трех перпендикулярах. *Прямая, лежащая в плоскости, перпендикулярна наклонной тогда и только тогда, когда она перпендикулярна проекции наклонной на эту плоскость.*

142.Докажите с помощью теоремы о трех перпендикулярах, что диагональ куба A_1C перпендикулярна плоскости BDC_1.

143.Докажите с помощью теоремы о трех перпендикулярах, что скрещивающиеся ребра правильной треугольной пирамиды перпендикулярны.

144.а) В тетраэдре ABCD углы BAC, CAD и BAD прямые. Докажите, что ортогональной проекцией вершины A на плоскость BCD является ортоцентр треугольника BCD.

б) Ребро AD тетраэдра ABCD перпендикулярно грани ABC. Докажите, что при проектировании на плоскость BCD ортоцентр треугольника ABC переходит в ортоцентр треугольника BCD.

145.Высота SO правильной пирамиды SABCD вдвое больше стороны ее основания. Определите, в каком отношении делится боковое ребро SD основанием перпендикуляра, опущенного на него из точки а) O; б) A.

146.Длина стороны основания правильной пирамиды SABCD равна a, длина бокового ребра – l. Постройте сечение пирамиды плоскостью, перпендикулярной ребру SC и проходящей через его середину, и найдите площадь сечения, если: а) $l = a\sqrt{3/2}$; б) $l = a\sqrt{5/2}$.

Ортоцентрический тетраэдр

147.Верно ли, что высоты произвольного тетраэдра пересекаются?

148.Докажите, что если ребра AD и BC тетраэдра ABCD перпендикулярны, то высоты, опущенные из вершин A и D, пересекаются в одной точке, причем эта точка лежит на общем перпендикуляре к AD и BC.

Определение. *Если все высоты тетраэдра (или их продолжения) пересекаются в одной точке, то* ***тетраэдр*** *называется* ***ортоцентрическим****, а точка пересечения высот – его* ***ортоцентром****.*

Примеры: правильная треугольная пирамида, тетраэдр с тремя прямыми углами при одной из вершин.

149.а) Докажите, что если две пары противоположных ребер тетраэдра перпендикулярны, то он является ортоцентрическим.

б) Докажите, что противоположные ребра ортоцентрического тетраэдра попарно перпендикулярны.

150.Докажите, что в ортоцентрическом тетраэдре общие перпендикуляры к парам противоположных ребер существуют и пересекаются в одной точке.

151.Докажите, что тетраэдр является ортоцентрическим тогда и только тогда, когда основанием его высоты является ортоцентр противолежащей грани.

152.Докажите, что тетраэдр является ортоцентрическим тогда и только тогда, когда отрезки, соединяющие середины его противоположных ребер, равны.

153.Какие тетраэдры имеют три непараллельных прямоугольных сечения?

154.Докажите, что тетраэдр является ортоцентрическим тогда и только тогда, когда суммы квадратов противоположных ребер равны.

155.Докажите, что в ортоцентрическом тетраэдре все плоские углы при одной вершине одновременно либо острые, либо прямые, либо тупые.

156.Докажите, что хотя бы одна из граней ортоцентрического тетраэдра – остроугольный треугольник.