Гимназия 1543, 9-В класс, какое-то там апреля.

Линейные операции над последовательностями и линейные рекуррентные соотношения.

Производная последовательности. Линейные отображения.

Некоторое время назад вы уже сталкивались с таким объектом, как производная последовательности. Напомним, что это такое.

Пусть a — последовательность. Её производной Da называется последовательность, определённая следующим образом:

$$(Da)_n = a_{n+1} - a_n.$$

Вспомним также свойства операции D взятия производной. Она аддитивна (a, b — последовательности):

$$D(a+b) = Da + Db;$$

и однородна (a — последовательность, λ — число):

$$D(\lambda a) = \lambda Da.$$

Эти два свойства в совокупности называются словом *линейность*. Отображения (вообще говоря, не только последовательностей, а любых объектов, которые можно друг с другом складывать и умножать на число), обладающие свойством линейности, называются *линейными отображениями*. Свойство линейности позволяет ввести над линейными отображениями операции суммы и произведения неким естественным образом.

Операции над линейными отображениями.

Пусть A, B — линейные отображения (с одинаковой областью определения), λ — число, x — элемент из области определения отображений.

Введём *сумму* отображений:

$$(A+B)(x) = Ax + Bx;$$

масштабирование отображения с параметром λ:

$$(\lambda A)(x) = \lambda(Ax);$$

произведение отображений:

$$(AB)(x) = (A \circ B)(x) = A\left(B\left(x\right)\right).$$

Линейность обеспечивает (левую) дистрибутивность произведения. Действительно, если A, B и C — линейные отображения, а α и β — числа, то:

$$A(\alpha B + \beta C)(x) = A(\alpha Bx + \beta Cx) = A(\alpha Bx) + A(\beta Cx) = \alpha A(Bx) + \beta A(Cx) = \alpha(AB)x + \beta(AC)x = (\alpha AB + \beta AC)(x).$$

(Заметим, кстати, что требование линейности B и C лишнее и нужно лишь для того, чтобы $A(B+C)$ осталось линейным.)

Тождественное отображение и левый сдвиг.

Первым делом введём тривиальное отображение I:

$$Ia = a.$$

Оно сопоставляет каждой последовательности её саму. Играет роль единицы, т.к. для любого отображения A верно $IA = AI = A$.

Операция левого сдвига L определяется следующим образом:

$$L = D + I.$$

Она сдвигает члены последовательности к её началу: $(La)_n = a_{n+1}$.

В этой лекции мы займёмся подробнее свойствами левого сдвига и научимся получать формулы n-го члена последовательности, заданной рекуррентно.

Многочлены левого сдвига.

Пусть $P(x)$ — многочлен. Если в него вместо переменной x подставить L, а свободным членом масштабировать тождественное отображение I, то получится многочлен сдвига $P(L)$, т.е.

$$P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 \Longrightarrow P(L) = a_n L^n + \ldots + a_1 L + a_0 I.$$

Многочлены сдвига можно перемножать так же, как и обычные многочлены, т.е. $P(L)Q(L) = PQ(L)$. Это следует из дистрибутивности L и того, что I ведёт себя при умножении операций так же, как и 1 при умножении чисел ($IL^k = L^k I = L^k$, $I^2 = I$).

Линейные рекуррентные соотношения.

Будем говорить, что последовательность a удовлетворяет *линейному рекуррентному соотношению* с аннулирующим многочленом $P(x)$, если $P(L)a = 0$ (под 0 понимается нулевая последовательность, т.е. состоящая из нулей).

Пример.

Любая арифметическая прогрессия удовлетворяет линейному рекуррентному соотношению с аннулирующим многочленом x^2-2x+1 (каждый член равен полусумме своих соседей).

Последовательность чисел Фибоначчи удовлетворяет линейному рекуррентному соотношению с аннулирующим многочленом x^2-x-1 (каждый член равен сумме двух предыдущих).

С последовательностями, заданными рекуррентными соотношениями, иногда не очень просто общаться — мы не знаем, как выглядит произвольный член такой последовательности. В случае, если рекуррентное соотношение линейно, мы научимся получать формулу для произвольного члена.

Пусть нам дана последовательность a и многочлен $P(x)$ такой, что P(L)a = 0. Наша задача — узнать, чему равно a_n при любом n. Для этого нам достаточно узнать нулевой член последовательности $L^n a$.

Вспомним, что многочлены можно делить друг на друга с остатком. Пусть при делении x^n на $P(x)$ получится неполное частное $M(x)$ и остаток $R(x)$, т.е. $x^n = M(x)P(x)+R(x)$. Посмотрим, что будет, если это соотношение подставить в выражение $L^n a$:

$$L^n a = (M(L)P(L)+R(L))a = M(L)P(L)a + R(L)a.$$

Но $P(L)a=0$, поэтому $L^n a = R(L)a$. Поэтому наша задача — найти остаток при делении x^n на $P(x)$. В случае остуствия у $P(x)$ кратных корней делается это очень просто.

Пусть все корни $x_1, \ldots x_k$ многочлена $P(x)$ различны. Тогда $R(x)$ — многочлен степени не выше $k-1$, совпадающий с x^n в корнях $P(x)$. Для нахождения коэффициентов $R(x)$ можно написать систему уравнений:

$$\begin{cases} R(x_1) = x_1^n; \\ \qquad \ldots \\ R(x_k) = x_k^n. \end{cases}$$

и решить её. Можно ещё, например, воспользоваться формулой Лагранжа для интерполяционного многочлена, которая есть, по сути, решение этой системы уравнений. Поскольку решение такой системы единственно и удовлетворяет тем же условиям, что и остаток при делении x^n на $P(x)$, оно совпадает с этим остатком.

Случай кратных корней.

Более труден для исследования случай, когда у многочлена $P(x)$ есть кратные корни. Покажем, как для корня x_0 кратности k получить k уравнений на коэффициенты $R(x)$. Напишем соотношение между $P(x)$ и $R(x)$:

$$x^n = M(x)P(x)+R(x) = (x-x_0)^k M(x)\tilde{P}(x) + R(x).$$

Сделаем замену переменной $x = y + x_0$:

$$y^n + \ldots + C_n^l y^l x_0^{n-l} + \ldots + x_0^n = y^k M(x)\tilde{P}(x) + R(y+x_0).$$

Заметим, что справа все одночлены степени ниже k относятся к $R(y+x_0)$. Коэффициенты в этих одночленых, исходя из вида левой части, должны быть равны C_n^l, $l=\overline{0,k-1}$. Таким образом мы получили k уравнений на коэффициенты $R(x)$.

Напишем такие уравнения для всех корней $P(x)$. Их будет как раз столько, сколько в $R(x)$ неизвестных коэффициентов. Докажем, что решение этой системы единственно (и тем самым докажем, что эта система задаёт именно остаток).

Предположим, что полученным уравнениям удовлетворяет многочлен $R_0(x)$. Обозначим через $R(x)$ настоящий остаток при делении x^n на $P(x)$. Корни $P(x)$ обозначим x_i, их кратности — k_i. Обозначим также через $\mathfrak{M}_k R$ сумму младших k одночленов многочлена R (все одночлены степени ниже k). Система уравнений для $R_0(x)$ выглядит так:

$$\begin{cases} \mathfrak{M}_{k_1} R_0(y+x_1) = C_n^{k_1-1} y^{k_1-1} x_1^{n-k_1+1} + \ldots + x_1^n; \\ \qquad\qquad \ldots \\ \mathfrak{M}_{k_p} R_0(y+x_p) = C_n^{k_p-1} y^{k_p-1} x_p^{n-k_p+1} + \ldots + x_p^n. \end{cases}$$

Остаток $R(x)$ удовлетворяет аналогичной система уравнений. Вычтем из одной системы другую. Система разностей соответствующих уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} \mathfrak{M}_{k_1}[R_0(y+x_1) - R(y+x_1)] = 0; \\ \qquad\qquad\qquad \ldots \\ \mathfrak{M}_{k_p}[R_0(y+x_p) - R(y+x_p)] = 0. \end{cases}$$

Из этой системы следует, что $0+x_i$ является корнем кратности k_i многочлена R_0-R. То есть, у R_0-R с учётом кратностей корней на 1 больше, чем максимально возможная степень R_0-R. Значит, $R_0-R=0$.

Пример использования вышеизложенной теории.

Сперва получим формулу n-го числа Фибоначчи. Аннулирующий многочлен:

$$P(x) = x^2 - x - 1 = \left(x - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right).$$

Обозначим $x_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, $x_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Остаток при делении x^n на $P(x)$ равен по формуле Лагранжа:

$$x_1^n \frac{x-x_2}{x_1-x_2} - x_2^n \frac{x-x_1}{x_1-x_2} = x\frac{x_1^n - x_2^n}{x_1-x_2} - x_1x_2\frac{x_1^{n-1}-x_2^{n-1}}{x_1-x_2}.$$

То есть, для n-го члена последовательности F_n верно:

$$F_n = F_1 \frac{x_1^n - x_2^n}{x_1 - x_2} + F_0 x_1 x_2 \frac{x_1^{n-1} - x_2^{n-1}}{x_1 - x_2}.$$

Учитывая, что $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, а $x_1 - x_2 = \sqrt{5}$, получаем:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$

Теперь получим формулу n-го члена арифметической прогрессии A с первым членом A_1 и разностью d. Аннулирующий многочлен арифметической прогрессии равен $P(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$.

Для остатка $R(x) = ax + b$ при делении x^n на $P(x)$ имеем следующее уравнение:

$$a(y+1) + b = 1^n + C_n^1 1^{n-1} y.$$

Отсюда получаем $a = C_n^1 = n$, $b = 1 - n$.

Таким образом, для произвольного члена A_n имеем:

$$A_n = nA_1 + (1-n)(A_1 - d) = A_1 + (n-1)d.$$

Это мы и должны были получить.