Графы – 2. Упражнения.

1) В 7 "Г" с начала учебного года завелась хорошая традиция: когда у какого-то ученика бывает день рождения, он зовёт на праздник всех своих друзей из класса. День рождения при этом бывает всегда таким шумным и весёлым, что все гости с того дня начинают дружить между собой. Когда 7"Г" в новом учебном году превратился в 8"Г", обнаружилось, что Вася и Петя не дружат. Докажите, что они так и не подружатся, сколько бы ещё ни продолжалась традиция весёлых дней рождения. (Считаем, что дружбы завязываются только на днях рождения.)

Решение: Если в графе дружб на начало 7 класса Вася и Петя были в разных связных компонентах, они, очевидно, никогда не подружатся. Если же существовал путь, проходящий через k их одноклассников, то он сокращается на ребро после ДР каждого из них, а за год ДР будут у всех k, поэтому длина пути в итоге станет единицей.

2) Утром Саша приехал в Петербург на поезде (на Московский вокзал). Весь день Саша ездил по городу, а вечером поужинал в кафе на одной из площадей. Оттуда он вновь направился на Московский вокзал, к обратному поезду. Докажите, что Саша сможет ехать к вокзалу, проезжая только по тем улицам, по которым он в течение дня проехал нечётное число раз.

Решение: Назовём улицу "чётной", если Саша проехал по ней чётное число раз, иначе — "нечётной". Ясно, что из площади, где находится кафе и из вокзальной площади выходит нечётное число нечётных улиц (НУ), а из остальных — чётное число оных. Саша может ехать из кафе по НУ (она есть), далее снова по НУ (она есть, так как на этом перекрёстке сходилось чётное число НУ, а по одной он приехал, то есть их было по крайней мере две, так что одна НУ осталась). И так далее. Если ему с какой-то площади ехать некуда — это площадь Восстания.

3) Докажите, что в любом связном графе два длиннейших простых пути имеют общие вершины.

Решение: Пусть это не так. Рассмотрим по вершине на каждом пути. Выберем их так, чтобы путь, соединяющий их, не имел общих рёбер с данными. При правильном выборе конца одного данного пути и конца другого путь из одного из концов в другой по кускам данных путей и по пути, соединяющем выбранные вершины, будет длиннее каждого из данных путей. Противоречие.

4) Граф представляет собой квадрат, разрезанный на n^2 квадратиков (вершины — узлы). Имеет ли он гамильтоновы пути, гамильтоновы циклы?

Решение: Путь всегда есть, "змейка" При нечётном n есть цикл, найти его несложно. При чётном нет, доказательство шахматной раскраской узлов — их нечётное число ($(n+1)^2$), но чёрные и белые должны чередоваться, а это невозможно.

5) В Швамбрании 2010 городов, любые два соединены прямым рейсом автобуса или поезда. Известно, что пользуясь только одним видом транспорта нельзя объехать 16 городов, побывав в каждом по разу, и вернувшись в исходный город. Докажите, что тогда, пользуясь одним видом транспорта, 17 городов объехать подобным образом тоже нельзя.

Решение: Если можно (напр., поездом) проехать путь A_1, A_2, ..., A_{17}, A_1, то города через один, такие, как A_1 и A_3 и пр., связаны автобусом, а тогда и автобусом можно проехать цикл из 17 городов: сначала с нечётными, потом с чётными номерами.
Рассмотрим ещё один город B. Если со всеми городами A_1, A_2, ..., A_{17} он связан автобусами, то нетрудно найти циклический автобусный маршрут из 16 городов.
Пусть B и A_1 связаны поездом. Тогда посмотрим, как связан B с A_4 и A_{15}. Если хоть с одним (допустим, с A_4) тоже поездом, то легко получить поездной цикл по 16 городам: из основного цикла выкидываем A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4 и ставим A_1B, BA_4. Если же с обоими — автобусом, то тоже плохо: из "автобусного" цикла выкидываем $A_{15}A_{17}$, $A_{17}A_2$, A_2A_4 и ставим $A_{15}B$, BA_4.