Решение уравнений 3-ей и 4-ой степеней.

1. Немного истории.

В начале шестнадцатого века многие математики бились над решением алгебраических уравнений 3й степени. Решения линейных и квадратных уравнения были известны уже в античности, а вот кубические уравнения долго не поддавались. Значительные продвижения были сделаны итальянским математиком Джероламо Кардано, который в результате своих изысканий открыл комплексные числа (также Кардано известен как автор первых трудов по теории вероятностей и изобретатель карданного вала).

Правда, решить кубическое уравнение ему так и не удалось. В некоторый момент он познакомился с другим итальянским математиком Тартальей, который умел решать кубические уравнения. Кардано узнал от Тартальи секрет решения этих уравнений, обещав нигде его не публиковать (Тарталья иногда учавствовал в так называемых "математических дуэлях", соревнуясь с другими математиками, а умение решать кубические уравнения давало ему большое преимущество). Но в 1543 году Кардано узнал, что независимо от Тартальи, причём раньше него, кубическое уравнение было решено Сципионом дель Ферро. В итоге в 1545 году формулы дель Ферро были опубликованы Кардано в трактате "Высокое Искусство", где он упомянул обоих математиков, их открывших. Но Тарталья, тем не менее, был фактом опубликования очень обижен и впоследствии доставил Кардано множество неприятностей (в том числе, Тарталье удалось упрятать Кардано на несколько месяцев за решётку и лишить профессорского звания).

О решении общего кубического уравнения $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ в этой лекции и пойдёт речь.

2. Линейная замена переменной в алгебраическом уравнении.

Очень важным приёмом при решении различных алгебраических уравнений является линейная замена переменной вида $x = y + k$, где x — старая переменная, y — новая. Уравнения первой и второй степени с помощью такой замены решаются сразу:

$$x + a = 0 \iff |x = y - a| : \quad y = 0;$$

$$x^2 + ax + b = 0 \iff |x = y - \frac{a}{2}| : \quad y^2 - (\frac{a^2}{4} - b) = 0.$$

Посмотрим, к чему может привести такая замена в кубическом уравнении:

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0.$$

Подставим вместо x $(y + k)$. Получим:

$$(y^3 + 3ky^2 + 3k^2y + k^3) + a(y^2 + 2ky + k^2) + b(y + k) + c = 0.$$

Соберём коэффициенты при степенях y:

$$y^3 + (3k + a)y^2 + (3k^2 + 2ak + b)y + (k^3 + ak^2 + bk + c) = 0.$$

Видим, что если $a = -3k$, то в уравнении исчезнет квадратичный член. К сожалению, это самое лучшее, чего мы можем добиться при помощи линейной замены. Таким образом мы пришли к уравнению вида:

$$x^3 + px + q = 0.$$

Если мы научимся решать такие, то мы сумеем решить и общее кубическое.

3. **Решение кубического уравнения.**

Представим x в виде суммы двух неизвестных величин u и v. Уравнение преобразуется к виду:

$$u^3 + v^3 + (3uv + p)(u + v) + q = 0.$$

Потребуем, чтобы $uv = -\dfrac{p}{3}$. Это позволит значительно упростить уравнение. Оно примет вид:

$$u^3 - \frac{p^3}{27u^3} + q = 0.$$

Домножим это уравнение на u^3. Легко видеть, что домножение корректно, если $p \neq 0$. Но если $p = 0$, то изначально мы имели совсем простое уравнение, решениями которого являются корни третьей степени из $(-q)$.

В результате домножения получим квадратное относительно u^3 уравнение:

$$u^6 + qu^3 - \frac{p^3}{27} = 0.$$

Пусть ξ — один из кубических корней одного из корней этого уравнения, а $\varepsilon = \dfrac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})$. Примем $u^3 = \xi^3$. Это равенство равносильно совокупности следующих трёх: $u = \xi$, $u = \varepsilon\xi$, $u = \varepsilon^2\xi$.

Для v в каждом из случаев имеем соответственно:

$$v = -\frac{p}{3\xi}; \quad v = -\frac{p}{3\xi}\varepsilon^2; \quad v = -\frac{p}{3\xi}\varepsilon.$$

Мы получили потенциально 3 решения:

$$x_1 = \xi - \frac{p}{3\xi}; \quad x_2 = \varepsilon\left(\xi - \frac{p}{3\xi}\varepsilon\right); \quad x_3 = \varepsilon\left(\xi\varepsilon - \frac{p}{3\xi}\right).$$

Хорошо бы удостовериться, что мы нашли все решения. Для этого покажем, что $x^3+px+q = (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$. У выражения справа, очевидно, корнями могут являться только x_1, x_2 и x_3. Раскроем скобки:

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - x_1x_2x_3.$$

Разберёмся отдельно с каждым из коэффициентов. Сначала при x^2:

$$x_1 + x_2 + x_3 = (1 + \varepsilon + \varepsilon^2)(\xi - \frac{p}{3\xi}).$$

Вспомним, что сумма всех корней из 1 некоторой степени равна 0. Значит, $x_1 + x_2 + x_3 = 0$. Пока всё хорошо. Коэффициент при x:

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = x_2x_3 - x_1^2 = \varepsilon^2\left(\xi - \varepsilon\frac{p}{3\xi}\right)\left(\varepsilon\xi - \frac{p}{3\xi}\right) - (\xi - \frac{p}{3\xi})^2 =$$

$$= \varepsilon^2\left(\varepsilon\xi^2 - \varepsilon^2\frac{p}{3} - \frac{p}{3} + \varepsilon\frac{p^2}{9\xi^2}\right) - (\xi^2 + \frac{p^2}{9\xi^2} - 2\frac{p}{3}) = -\frac{p}{3}(-2 + \varepsilon + \varepsilon^2) = p$$

Теперь, наконец, свободный коэффициент:

$$x_1x_2x_3 = \varepsilon^2\left(\varepsilon\xi^2 - \varepsilon^2\frac{p}{3} - \frac{p}{3} + \varepsilon\frac{p^2}{9\xi^2}\right)\left(\xi - \frac{p}{3\xi}\right) = \left(\xi^2 + \frac{p}{3} + \frac{p^2}{9\xi^2}\right)\left(\xi - \frac{p}{3\xi}\right) =$$

$$= \xi^3 + \frac{p\xi}{3} + \frac{p^2}{9\xi} - \frac{p\xi}{3} - \frac{p^2}{9\xi} - \frac{p^3}{27\xi^3} = \xi^3 - \frac{p^3}{27\xi^3}.$$

Вспомним теперь, что же такое ξ. А ξ был кубическим корнем одного из решений уравнения $u^6 - \frac{p^3}{27} + qu^3 = 0$. Поэтому, свободный коэффициент равен q, что и требовалось.

Полученные формулы для x_1, x_2 и x_3 имеют название формул Кардано.

4. **Расположение корней уравнения 3й степени на комплексной плоскости.**

Введём величину $\delta = q^2/4 + p^3/27$. δ называется дискриминантом кубического уравнения. От его знака зависит расположение корней уравнения. Проведём некоторое исследование (p и q считаем действительными).

Если дискриминант положителен, то ξ^3 — действительное число. Тогда $\xi = \varepsilon^k|\xi|$. Нетрудно заметить, что при этом один из корней действителен, а остальные два находятся друг над другом (их разность чисто мнима), более того, они комплексно сопряжены друг другу (их сумма противоположна действительному корню, т.е. сама действительна).

Если дискриминант равен 0, то разность двух комплексных корней равна 0, следовательно, они совпадают и расположены на действительной оси, причём каждый из них по модулю равен половине третьего корня. Обратное утверждение, кстати, тоже верно. Если есть совпадающие корни, то дискриминант равен 0 (проверьте сами).

Если же дискриминант отрицателен, то все 3 корня различны и действительны. В этом случае $\xi^3 = -\dfrac{q}{2} \pm i\sqrt{-\delta}$. Вычислим модуль:

$$|\xi|^6 = \frac{q^2}{4} - \frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27},$$

$$|\xi|^2 = -\frac{p}{3}.$$

В выражении для корня x_k есть 2 слагаемых, дающих в произведении $-\dfrac{p}{3}$. Одно из этих слагаемых по модулю совпадает с $|\xi|$. А значит, второе слагаемое сопряжено к первому. Значит, каждый корень действителен. Все корни различны, т.к. в противном случае дискриминант был бы равен 0.

Замечание: случай отрицательного дискриминанта известен как casus irreducibilis. В этом случае действительные корни выражаются при помощи корней 3й степени из комплексных чисел. Попытка посчитать эти корни приводит к уравнению 3й степени, эквивалентному исходному. Ни Тарталья, ни дель Ферро не умели решать кубические уравнения с отрицательным дискриминантом. Впервые формулы для корней в этом случае получил Кардано, введя число $\sqrt{-1}$ и правило $\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = 1$, открыв тем самым комплексные числа.

5. **Решение уравнения четвёртой степени (метод Феррари).**

Может показаться, что решать уравнения 4й степени гораздо труднее, чем 3й (сравните формулы для корней уравнений 1й, 2й и 3й степени). Оказывается, это не так, и решать такие уравнения ничуть не труднее (а порой и легче), чем уравнения 3й степени. Впервые метод решения уравнений 4й степени был получен Феррари — учеником Кардано.

Рассмотрим уравнение $x^4 + px^2 + qx + r = 0$. Любое уравнение 4й степени можно привести к такому виду линейной заменой (докажите сами). Добавим и вычтем член $2tx^2 + t^2$. Получим:

$$(x^2 + t)^2 + (p - 2t)x^2 + qx + (r - t^2) = 0.$$

Слева складываются полный квадрат и нечто однопараметрическое. Выберем значение параметра t так, чтобы нечто однопараметрическое стало тоже полным квадратом. Т.к. оно представляет собой квадратный трёхчлен, то условие бытия полным квадратом есть равенство нулю дискриминанта:

$$q^2 = 4(p - 2t)(r - t^2).$$

Это уравнение 3й степени относительно t. Достаточно найти хотя бы 1 его корень. Тогда наше уравение 4й степени преобразуется к виду:

$$(x^2 + t)^2 + (Ax + B)^2 = 0.$$

Отсюда либо $x^2 + t = i(Ax + B)$, либо $x^2 + t = -i(Ax + B)$. Далее остаётся только решить эти два квадратных уравнения.