9 математический класс **1 ноября 2009 года.**

Разные задачи. Список №2. Срок сдачи до 30 ноября.

1) Выписаны натуральные числа от 1 до 2009. Какое минимальное количество чисел надо вычеркнуть, чтобы никакое оставшееся число не равнялось произведению трёх других оставшихся?

Ответ: 11 чисел. Если вычеркнуть первые 11 чисел, то любое произведение трёх оставшихся не менее $12 \cdot 13 \cdot 14 > 2009$. Если же хотя бы одно число $k \leqslant 11$ оставить, то из $23-k$, $24-k$ и $k(23-k)(24-k)$ хотя бы одно придётся удалить. (Можно проверить перебором, что последнее число меньше 2009.)

2) Биссектрисы углов треугольника ABC пересекают описанную окружность в точках A_1, B_1, C_1. Докажите, что сумма $AA_1 + BB_1 + CC_1$ превышает периметр треугольника.

Пусть O — инцентр треугольника, p — его полупериметр. Складывая три неравенства типа $AO + OB > AB$ получим, что $AO + BO + CO > p$. С помощью вписанных углов доказывается, что $A_1B = A_1C = A_1O$ и два аналогичных равенства. Затем сложением трёх неравенств вида $A_1B + A_1C > BC$ получим, что $A_1O + B_1O + C_1O > p$. Суммирование двух выведенных неравенств приведёт к успеху.

3) *Магараджей* называется шахматная фигура, которая может бить и как ферзь, и как конь. Можно ли расположить на шахматной доске 8 магараджей так, чтобы они не били друг друга?

Ответ: нет. Решение. Лемма: в квадрате 4×4 больше двух магараджей поставить нельзя, а если поставить двух, то в центральном квадратике 2×2 ни один стоять не будет. Лемма доказывается несложным перебором. Перейдём к решению. Пусть магараджей удалось расставить. Разбив доску на четыре квадрата 4×4, мы получим по две фигуры в каждом, то есть центральные зоны будут пустыми (см. рис. 1.). Разобьём теперь доску на два квадрата и два прямоугольника, (см. рис. 2). В прямоугольниках не более, чем по два магараджи, значит в квадратах тоже по два, то есть и их центральные зоны пусты. Теперь ясно, что в незакрашенные клетки на рис. 3 нельзя поставить 8 магараджей.

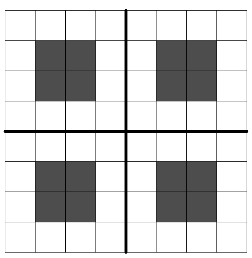

Рис. 1.

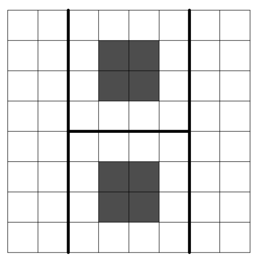

Рис. 2.

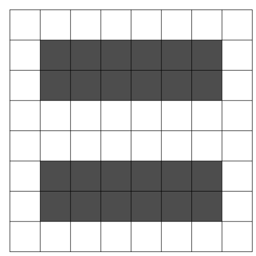

Рис. 3.

4) К реке подошли три генерала, каждый — с двумя ординарцами. В их распоряжении имеется только одна лодка, вмещающая не более двух человек. Плавать никто не умеет, зато грести умеют все. Смогут ли все девять человек переправиться на противоположный берег реки, если ни один из генералов не согласен оставлять ни одного из своих ординарцев в присутствии другого генерала ни в лодке, ни на берегу (приставшая к берегу лодка считается частью берега)?

Ответ: не смогут. Решение. Пусть вначале все находятся на левом берегу. Предположим, что все девять человек смогут в соответствии с условиями задачи переправиться на правый берег. Рассмотрим первое появление на правом берегу каких-либо генералов (одного или двух). Так как в этот момент времени на левом берегу находится хотя бы один генерал, то, чтобы выполнялись требуемые условия, при каждом генерале должны находиться все его ординарцы. Но тогда с правого берега на левый в данный момент обязаны уехать все находящиеся на правом берегу генералы (если там всего один генерал, то он может уехать со своим ординарцем). Итак, как только на правом берегу появляются один или два генерала, они сразу же уезжают на левый берег. Очевидно, что этот факт противоречит нашему предположению.

5) Какое наименьшее количество типов монет должен выпустить Монетный Двор России, чтобы любую сумму от 1 до 20 рублей можно было бы уплатить не более чем двумя монетами (без сдачи)?

Ответ: 6. Решение. Шести типов хватит, например 1 руб., 3 руб., 5 руб., 7 руб., 9 руб. и 10 руб. Пять типов монет теоретически могут "покрыть" 20 сумм (5 — они сами, 5 — удвоенные и $C_5^2 = 10$ — суммы разных монет). Меньшего количества типов не хватит никак, а пять возможно только если каждое представление однозначно. Если не брать чётные монеты, то пяти не выйдет, если же минимальная чётная монета в $2n$ руб., то монету в n руб. брать нельзя (нарушается однозначность), а тогда n руб. нельзя набрать.

6) Пусть BC — наибольшая сторона треугольника ABC. На ней взяты точки K и L такие, что $BK = BA$ и $CL = CA$. На стороне AB взята точка M такая, что $BM = BL$, а на стороне AC взята точка N такая, что $CN = CK$. Докажите, что точки A, N, K, L и M лежат на одной окружности.

Решение. Нетрудно показать, что $ML||AK$ и $NK||AL$, а кроме того $LK = MA = AN$. Это значит, что $AMLK$ и $ANKL$ — равнобедренные трапеции, то есть они вписаны, причём обе — в описанную окружность треугольника ALK.

7) Решите в натуральных числах уравнение: $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{2009}$.

Ответ: $(41; 1476)$, $(164; 1025)$, $(369; 656)$ и три решения, получающиеся из этих перестановкой. Решение. Заметим, что $2009 = 41 \cdot 7^2$. Возводя в квадрат $\sqrt{y} = \sqrt{2009} - \sqrt{x}$, получим, что число $2009x$ должно быть точным квадратом, то есть $x = 41m^2$. Аналогично, $y = 41n^2$. Теперь осталось решить в натуральных числах уравнение $x + y = 7$.

8) Жюри несло книги на награждение, причем председатель нес 72-ю часть всех книг. Член жюри, который нес больше всех книг, свалился в изнеможении и сошел с дистанции; остальные дошли, а за упавшими книгами сходил председатель. В сумме он принес восьмую часть всех книг. Докажите, что до места награждения добрались не менее 8 рядовых членов жюри.

Решение. Упавший член жюри нес $\frac{1}{8} - \frac{1}{72} = \frac{1}{9}$ всех книг, поэтому каждый из оставшихся нес меньше, т.е. членов жюри было больше девяти. Кроме председателя и упавшего человека, остается не менее восьми дошедших до конца.

9) На сторонах AB, BC, AC, остроугольного треугольника ABC отмечены точки M, N и K соответственно так, что $\angle AMK = \angle BMN = \angle ACB$. Пусть L — точка пересечения BK и AN. Докажите, что $LNCK$ вписан.

Решение. Лемма: если описанные окружности треугольников BMN и AMK пересекаются в точке E, то $KENC$ вписан. В самом деле, при стандартном обозначении углов треугольника $\angle MEK = 180° - \alpha$ и $\angle MEN = 180° - \beta$, поэтому $\angle KEN = 360° - (180° - \alpha) - (180° - \beta) = \alpha + \beta$, поэтому $\angle KEN + \angle KCN = 180°$, что и требовалось. Перейдём к решению. Пусть E — точка пересечения окружностей из леммы, а $\angle AMK = \angle BMN = \angle ACB = \gamma$. Тогда $\angle KEN = 180° - \gamma$, а $\angle KEA = \angle KMA = \gamma$, то есть $\angle AEN = 180°$, что говорит о том, что E лежит на AN. Аналогично показывается, что E лежит на BK, то есть $E = L$, тогда $KTNC = KENC$ вписан.

10) Решите уравнение $x^2 - 5x - 4\sqrt{x} + 13 = 0$.

Решение. Уравнение приводится к виду $(x-3)^2 + (\sqrt{x} - 2)^2 = 0$, из которого ясно, что решений нет.

11) На бесконечном листе клетчатой бумаги требуется закрасить конечное число клеток так, чтобы каждая закрашенная клетка касалась ровно n закрашенных клеток (касалась — значит имела общую точку). Для каких n это можно сделать?

Ответ: для $n \leqslant 3$. Решение. Примеры: для $n = 0$ — одна любая клетка, для $n = 1$ — две соседние клетки, для $n = 2$ — четыре клетки, соседние с некоторой по стороне, для $n = 3$ — четыре клетки, образующие квадрат 2×2. Пусть теперь при $n \geqslant 4$ такая конструкция возможна. Рассмотрим самую верхнюю из самых левых клеток и поставим на неё шашку. Среди её восьми соседей 4 заведомо не закрашены, поэтому у неё не более 4-х закрашенных соседних клеток. Тем самым случаи $n > 4$ невозможны. Объясним, почему и $n = 4$ тоже невозможен. Заметим, что соседняя клетка, расположенная справа-сверху от клетки с шашкой, закрашена. Переставим шашку на неё. Если над ней есть другие закрашенные клетки, переставим шашку на самую верхнюю из них. Тогда соседняя клетка, расположенная справа-сверху от клетки с шашкой, опять закрашена. И так далее. Шашка будет постоянно переходить на всё более и более верхнюю горизонталь, что для конечного множества закрашенных клеток невозможно.

12) За круглым столом сидят 30 человек — рыцари и лжецы. Известно, что лжец никогда не сядет между двумя рыцарями. Каждого спросили, сколько у него соседей-лжецов. 12 опрошенных сказали, что один, а остальные сказали, что оба. Сколько рыцарей и сколько лжецов сидит за столом?

Ответ: 6, 10 или 14. Решение. Рыцари сидят по одиночке или парами: если бы три рыцаря сидели подряд, то средний дал бы ответ "ни одного". Поскольку лжецы не сидят между рыцарями, все люди делятся на непересекающиеся группы сидящих подряд: группы вида ЛРРЛ, вида Л и вида ЛРЛ. Если первых x, вторых y, а третьих z, то из данных по количеству ответивших "один" и "оба" получим $2x + y = 12$ и $2x + 3z = 18$. Из этого легко вывести, что y кратно шести, а потом перебрать варианты.

13) Существует ли такое натуральное n, что числа n, $2n$, $3n$, $\ldots 2009n$ являются степенями натуральных чисел с показателем, большим единицы?

Ответ: да. Решение. Методом математической индукции докажем, что для любого натурального k найдётся натуральное n, что числа n, $2n$, $3n$, $\ldots kn$ являются степенями натуральных чисел с показателями, большими единицы. Для $k = 1$ это ясно. Пусть для $k = m$ такое число n найдено. То есть для любого $l \leqslant m$ верно $ln = a_l^{b_l}$. Тогда рассмотрим число $N = ((m+1)n)^t$, где $t = HOK(b_1, b_2, \ldots, b_m)$. Тогда число nN сгодится для $k = m + 1$.

14) Фигура F представляет собой уголок из пяти клеток, полученный из прямоугольника 2×4 прямоугольника 1×3. Геометрически F — невыпуклый шестиугольник. Будем говорить, что F вписана в прямоугольник, если все её вершины, кроме вершины вогнутого угла, лежат на границе прямоугольника. Каким может быть отношение сторон прямоугольника, в который вписан уголок F?

Ответ: $1 : 2$. Решение. Если одна из вершин прямоугольника совпадает с вершиной уголка, то этот прямоугольник — в точности тот 2×4, о котором шла речь в условии. Если нет — тогда из пяти вершин прямых углов какие-то две должны лежать на одной стороне прямоугольника. Понятно, что это две вершины, соседние с вершиной вогнутого угла. Тогда прямоугольник строится однозначно, а его разность с уголком складывается из пяти попарно подобных прямоугольных треугольников с отношением катетов $1 : 3$. (Подобие следует из равенства острых углов, отношение — из подобия и треугольника с гипотенузой на стороне прямоугольника, для которого оно очевидно.) Далее, полагая для удобства сторону клетки равной $\sqrt{10}$, вычислим стороны прямоугольника: 7 и 14.

15) В пустые клетки (изначально пустой) таблицы $n \times n$ Люба и Лера по очереди вписывают числа: Люба — НОД номеров столбца и строки, на пересечении которых находится выбранная ею клетка, Лера — НОК аналогичных чисел для своей клетки. Когда таблица заполняется, они делят каждое число на номер столбца, в котором оно стоит, потом все результаты перемножают. Если результат получается меньше единицы, побеждает Люба, иначе — Лера. Кто выиграет при правильной игре?

Ответ: Лера. Решение. Числа на главной диагонали таблицы Люба и Лера ставят одни и те же, все они дают в итоге множитель 1, поэтому нет разницы, кто и когда эти клетки заполнит. Остальные клетки разобьём на пары симметричных относительно главной диагонали. Если в одной клетке пары стоит $НОД(a, b)$, а в другой $HOK(b, a)$, то в произведение войдёт $\frac{НОД(a,b)}{a} \cdot \frac{HOK(b,a)}{b} = \frac{НОД(a,b) \cdot HOK(b,a)}{ab} = 1$. Лере достаточно проследить, чтобы каждую пару заполняли разные игроки, тогда итогом будет 1, что её устроит. Этого нетрудно добиться: если Люба "вскрывает" новую пару, Лера должна "закрывать" её, если ходит на диагональ — тоже ходить на диагональ. При чётном n такая стратегия сойдёт, а при нечётном может получиться так, что вся диагональ заполнена, а ход Леры. Тогда Лера "открывает" одну пару, дальше играет по вышеописанной стратегии, дожидается, когда Люба "закроет" открытую Лерой пару, после чего "открывает" новую, если они ещё есть, и так далее.