Разные задачи. Список №2. Срок сдачи до 30 ноября.

1) Выписаны натуральные числа от 1 до 2009. Какое минимальное количество чисел надо вычеркнуть, чтобы никакое оставшееся число не равнялось произведению трёх других оставшихся?

2) Биссектрисы углов треугольника ABC пересекают описанную окружность в точках A_1, B_1, C_1. Докажите, что сумма $AA_1 + BB_1 + CC_1$ превышает периметр треугольника.

3) *Магараджей* называется шахматная фигура, которая может бить и как ферзь, и как конь. Можно ли расположить на шахматной доске 8 магараджей так, чтобы они не били друг друга?

4) К реке подошли три генерала, каждый — с двумя ординарцами. В их распоряжении имеется только одна лодка, вмещающая не более двух человек. Плавать никто не умеет, зато грести умеют все. Смогут ли все девять человек переправиться на противоположный берег реки, если ни один из генералов не согласен оставлять ни одного из своих ординарцев в присутствии другого генерала ни в лодке, ни на берегу (приставшая к берегу лодка считается частью берега)?

5) Какое наименьшее количество типов монет должен выпустить Монетный Двор России, чтобы любую сумму от 1 до 20 рублей можно было бы уплатить не более чем двумя монетами (без сдачи)?

6) Пусть BC — наибольшая сторона треугольника ABC. На ней взяты точки K и L такие, что $BK = BA$ и $CL = CA$. На стороне AB взята точка M такая, что $BM = BL$, а на стороне AC взята точка N такая, что $CN = CK$. Докажите, что точки A, N, K, L и M лежат на одной окружности.

7) Решите в натуральных числах уравнение: $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{2009}$.

8) Жюри несло книги на награждение, причем председатель нес 72-ю часть всех книг. Член жюри, который нес больше всех книг, свалился в изнеможении и сошел с дистанции; остальные дошли, а за упавшими книгами сходил председатель. В сумме он принес восьмую часть всех книг. Докажите, что до места награждения добрались не менее 8 рядовых членов жюри.

9) На сторонах AB, BC, AC, остроугольного треугольника ABC отмечены точки M, N и K соответственно так, что $\angle AMK = \angle BMN = \angle ACB$. Пусть L — точка пересечения BK и AN. Докажите, что $LNCK$ вписан.

10) Решите уравнение $x^2 - 5x - 4\sqrt{x} + 13 = 0$.

11) На бесконечном листе клетчатой бумаги требуется закрасить конечное число клеток так, чтобы каждая закрашенная клетка касалась ровно n закрашенных клеток (касалась — значит имела общую точку). Для каких n это можно сделать?

12) За круглым столом сидят 30 человек — рыцари и лжецы. Известно, что лжец никогда не сядет между двумя рыцарями. Каждого спросили, сколько у него соседей-лжецов. 12 опрошенных сказали, что один, а остальные сказали, что оба. Сколько рыцарей и сколько лжецов сидит за столом?

13) Существует ли такое натуральное n, что числа n, $2n$, $3n$, $\ldots 2009n$ являются степенями натуральных чисел с показателем, большим единицы?

14) Фигура F представляет собой уголок 4×1 клеток. Геометрически F — невыпуклый шестиугольник. Будем говорить, что F вписана в прямоугольник, если все её вершины, кроме вершины вогнутого угла, лежат на границе прямоугольника. Каким может быть отношение сторон прямоугольника, в который вписан уголок F?

15) В пустые клетки (изначально пустой) таблицы $n \times n$ Люба и Лера по очереди вписывают числа: Люба — НОД номеров столбца и строки, на пересечении которых находится выбранная ею клетка, Лера — НОК аналогичных чисел для своей клетки. Когда таблица заполняется, они делят каждое число на номер столбца, в котором оно стоит, потом все результаты перемножают. Если результат получается меньше единицы, побеждает Люба, иначе — Лера. Кто выиграет при правильной игре?