9 математический класс **23 сентября 2009 года.**

Комплексные числа.

В начальной школе нас учили считать на пальцах — это натуральный счёт. Потом, для решения уравнения $x+2=1$ к положительным числам присоединим отрицательные и получим целые (и теперь мы можем решить **любое** уравнение вида $x+a=b$). Чтобы решить уравнение $2x=3$ — к целым добавим дробные и получим рациональные (и теперь мы можем решить **любое** уравнение вида $x \cdot a = b$) . Потом мы научились решать уравнение $x^2=2$, добавив к рациональным иррациональные числа(и теперь мы можем решить **любое** уравнение вида $x^n=a$, где $a \geqslant 0$). А теперь нам очень хочется научиться решать уравнения вида $x^2=-1$. Для этого мы вводим *комплексные числа.*

Определение 1. *Мнимая единица* — это такое число i, для которого $i^2=-1$.

Ну хорошо, допустим, уравнение $x^2=-1$ мы решили. А что же будет для таких уравнений, как $x^2-3x+3=0$? А для них мы введём новое понятие.

Определение 2. Выражение вида $a+bi$, где $a,b \in \mathbb{R}$, а i — мнимая единица носит название *комплексного числа с действительной частью a и мнимой частью b*. Все такие числа образуют множество $\mathbb{C}$. Действительная часть обозначается как $Re(z)$, мнимая — как $Im(z)$.

Например, комплексными числами являются $2+3i, 5-i, 1+i\sqrt{2}$. Что будет, если, например, $b=0$? Будет действительное число. А если $a=0$? Будет *чисто мнимое* число. Заметим, что i — это просто такой символ, мы не можем его использовать для счета, но можем умножать на действительное число, складывать, вычитать и даже делить. Например $2i+6i=8i, i^3=-i, \frac{i}{-i}=-1$ и т.д. А как же складывать, ведь в определении есть "+"¿? Знак "+", стоящий между частями комплексного числа не несёт смысла сложения, мы с тем же успехом можем поставить туда звёздочку или запятую, потому как мы не можем по-настоящему складывать мнимое и действительное числа друг с другом, мы их так просто записываем. Зато можно определить операции сложения, умножения, вычитания и деления для самих комплексных чисел как соответствующие операции на их действительной и мнимой частях.

Пусть у нас есть два числа $z_1=a_1+b_1i$ и $z_2=a_2+b_2i$. Их *суммой* назовём число $z_1+z_2= a_1+b_1i+a_2+b_2i=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i$. Их *произведением* назовём $z_1z_2=(a_1+b_1i)(a_2+b_2i)= (a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)i$.

Теперь приведём некоторые свойства этих операций для комплексных чисел:

1) $z_1+z_2=z_2+z_1, z_1z_2=z_2z_1$

2) $z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3$

3) $z_1+z_2+z_3=(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$ и аналогично для умножения.

Хорошо, вычитание аналогично сложению, а вот что делать с делением? Поделим z_1 на z_2: $\frac{z_1}{z_2}=\frac{a_1+b_1i}{a_2+b_2i}=?$, а что дальше? Пока не ясно, почему и тут тоже получается комплексное число, а не что-то новое. Введём определение, которое поможет это прояснить.

Определение 3. *Сопряженным* к комплексному числу $z=a+bi$ называется $\overline{z}=a-bi$.

Определение 4. *Модулем* комплексного числа $z=a+bi$ называется число $\rho(z)=\sqrt{a^2+b^2}=|z|$.

Заметим, что $|z|$ — это действительное число.

Теперь рассмотрим их свойства. Их нетрудно доказать непосредственно:

1) $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$

2) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

3) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

4) $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$

5) $|\overline{z}| = |z|$

6) $|z|^2 = z\overline{z}$

7) $\overline{\overline{z}} = z$

Из свойства №6 становится ясно, что делать с частным двух чисел. Итак, домножим знаменатель на $\overline{z_2}$, тогда он станет вещественным числом и мы сможем разделить на него действительную и мнимую части числителя:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \frac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{a_2^2 + b_2^2} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2)}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{(a_2 b_1 - a_1 b_2)}{a_2^2 + b_2^2} i$$

Итак, теперь мы знаем, что такое комплексные числа и даже умеем что-то с ними делать. Попробуем применить новые знания к решению уравнения $x^2 - 3x + 3 = 0$. Дискриминант $D = 9 - 12 = -3$ отрицательный. Но мы теперь умеем извлекать корни из отрицательных чисел и $\sqrt{D} = \pm i\sqrt{3}$, значит, решения будут выглядеть как $\frac{3 \pm i\sqrt{3}}{2}$. Проверим, действительно ли мы нашли решения: подставим и всё получится.

Теперь, поговорим о геометрическом смысле комплексных чисел. Из определения понятно, что комплексное число состоит из двух частей — действительной и мнимой. Таким образом, например, число $z = a + bi$ мы можем записать как (a, b) (видите, мы вместо "плюса" использовали запятую, и ничего!), то есть, мы поставили в соответствие каждому числу точку на координатной плоскости, где по горизонтальной оси откладывается дейстительныя часть z, равная a, и по вертикальной оси — мнимая часть, равная b. Эти оси, соответственно, называются *действительной* и *мнимой*.

Теперь посмотрим в новом свете на уже введенные понятия. Что будет суммой двух комплексных чисел? Как графически найти сопряженное число и что такое модуль? Как ещё можно вывести свойство 4?

И на сладкое последнее определение:

Определение 5. *Аргументом* комплексного числа называется угол φ между OX и OZ. Обозначается как $arg(z) = \varphi$.

Достаточно очевидно следующее **Утверждение.** Любое комплексное число z представимо в виде $z = \rho(z)(\cos(arg(z)) + i\sin(arg(z)))$.