

## Математическое ожидание. Упражнения.

Пусть случайная величина  $X$  принимает значения  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  с вероятностями  $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$  соответственно (этот набор значений с вероятностями называется распределением случайной величины). Напомним, что её математическим ожиданием (или средним значением) называется

$$\sum_{k=1}^n x_k p_k = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + \dots + x_n p_n.$$

1) В мешке сидят два красных кота, три синих и четыре жёлтых. Руслан осторожно вынимает кота из мешка. Если кот красный, Руслан получает 5 очков, если синий — 2 очка, а если желтый, то с него снимают 3 очка. Сколько в среднем очков получит Руслан?

2) Люба и Лера играют в такую игру — Люба бросает монетку, а Лера две монетки. Потом смотрят, сколько выпало решек. Ровно столько рублей Люба платит Лере (если это число чётное) и Лера Любе (если нечётное). Справедлива ли такая игра?

3) Кидают два кубика.

а) Посчитайте математическое ожидание суммы выпавших очков. Сделайте это двумя способами — непосредственно и с помощью формулы для матожидания суммы случайных величин.

б) Посчитайте математическое ожидание произведения выпавших очков. Сделайте это двумя способами — непосредственно и с помощью формулы для матожидания произведения независимых случайных величин.

в) Посчитайте математическое ожидание произведения суммы и произведения выпавших очков. Можно ли было взять результаты двух предыдущих пунктов и применить формулу для произведения матожиданий? Почему?

4) а) Монетку бросают до первого выпадения орла, но не больше пяти раз. Какое в среднем количество бросков нужно сделать?

б) А если нет ограничения на количество бросков? (Для решения используйте равенство  $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 1$ .)

5) Монетку бросают  $n$  раз. Найдите матожидание количества орлов.

6) Солдат срочной службы написал письма  $n$  своим любимым девушкам, надписал  $n$  конвертов с адресами и случайным образом разложил письма по конвертам. Сколько девушек в среднем получают адресованное себе письмо?

7) Хитрый Лёша предложил простодушному Артёму сыграть в игру. Они много раз подбрасывают монету и записывают, что выпадает. Как только появляется последовательность "решка, решка, орёл", игра кончается, и Артём платит Лёше 100 евро. Как только же появляется последовательность "решка, орёл, орёл", игра тоже кончается, и Лёша платит Артёму 100 евро. Лёша говорит, что игра честная, потому что между "решка, орёл, орёл" и "решка, решка, орёл" нет никакой разницы, оба набора равновероятны.

а) Так ли это? Стоит ли Артёму соглашаться играть?

б) "Ну уж нет, давай-ка я тебе не 100 евро буду платить, а ..." Какую сумму в евро должен назвать Артём, чтобы игра была справедливой?

в) "Сыграем, только дай-ка я сначала погну слегка монетку, чтобы ..." Какой вероятности  $p$  выпадения орла должен добиться Артём, чтобы игра стала справедливой?