Отношение эквивалентности – 1 (19/11/09)

Что такое множество, интуитивно понятно всем. На алгебре мы работаем с множествами натуральных чисел, рациональных чисел. На геометрии рассматриваем множества прямых, множества векторов, различные множества точек плоскости. Множество состоит из элементов.

С элементами множества мы можем каким-то образом работать. Например, на множестве рациональных чисел определено умножение и деление, на множестве векторов определено сложение и вычитание. Над элементами множества мы совершаем *операции*, то есть сопоставляем любым двум элементам третий из этого же множества. Кроме того, числа мы можем сравнивать. То есть на множестве рациональных чисел определено *отношение* «$\leqslant$». Рассмотрим множество прямых на плоскости и некоторую точку A. Про любую прямую можно сказать, проходит ли она через точку A или нет. Это *свойство* элементов нашего множества.

Упражнение. Приведите примеры множеств. Какие операции и отношения определены на этих множествах? Какими свойствами обладают элементы этих множеств? Пересечение прямых — это отношение или операция? Равенство чисел — это отношение?

Определение. На элементах множества определено отношение R, если про любые два элемента этого множества a и b можно сказать, находятся они в отношении aRb или нет.

Определение. Отношение $\sim$ называется *отношением эквивалентности*, если выполнены следующие свойства:

- $a \sim a$;
- $a \sim b \Longrightarrow b \sim a$;
- $a \sim b,\ b \sim c \Longrightarrow a \sim c$.

Рассмотрим множество действительных чисел. Очевидно, что отношение равенства на этом множестве — это отношение эквивалентности. А вот для отношения «$\leqslant$» не выполнено второе свойство. Интуитивно понятно, что числа не могут быть эквивалентны, если они находятся в отношении «$\leqslant$». Эквивалентность — это «одинаковость» в каком-то смысле. Элементы похожи друг на друга, но чем-то отличаются. Три свойства отношения эквивалентности — это формализация той «одинаковости», которую мы интуитивно чувствуем.

Упражнение. Будет ли параллельность отношением эквивалентности на множестве прямых? А пересечение?

Вы, наверное, помните, что такое графы. Один и тот же граф можно изображать по-разному. Например, граф из пяти вершин, такой, что первая вершина соединена со второй, вторая с третьей, …, пятая с первой, можно изобразить на плоскости как пятиугольник, а можно — как пятиконечную звезду. Такие графы называются *изоморфными*. Вспомним определение изоморфных графов:

Определение. Два графа называются изоморфными, если у них поровну вершин, и вершины каждого графа можно занумеровать числами так, чтобы вершины первого графа были соединены ребром тогда и только тогда, когда соединены ребром соответствующие вершины второго графа.

Легко проверить, что изоморфизм графов является отношением эквивалентности. Пусть у нас есть две картинки, два изоморфных графа. С одной стороны, это один и тот же граф, с другой — эти графы, безусловно, разные. Но иногда удобно на эту разницу не обращать внимания.

Определение. Пусть на множестве A задано отношение эквивалентности. Рассмотрим некоторый элемент множества $a \in A$ и все элементы, эквивалентные ему. Все эти элементы вместе с a образуют подмножество $[a]$, называемое *классом эквивалентности.*

Рассмотрим множество вершин некоторого графа и отношение «вершины соединены ребром». Это не является отношением эквивалентности, так как не выполняются первое и третье свойства. Однако легко проверить, что если вершины соединены путём, они эквивалентны. Классы эквивалентности, порождаемые этим отношением — это компоненты связности графа.

Задача 1. Пусть задано отношение эквивалентности $\sim$ на элементах множества M, и пусть $x \nsim y$. Докажите, что $[x] \cap [y] = \varnothing$.

Это утверждение означает, что множество распадается на классы эквивалентности. Например, граф распадается на компоненты связности.

Упражнение. В треугольнике стороны равны 3, 4 и 5 см. Найдите высоту, опущенную на большую сторону.

Рассмотрим множество треугольников на плоскости. Среди них рассмотрим все треугольники со сторонами 3, 4 и 5 см. В каком из них мы нашли высоту?

Равенство фигур на плоскости — это отношение эквивалентности. В такой задаче нам не важно местоположение треугольника. Мы работаем не с конкретным элементом множества треугольников, а с классом эквивалентности. То есть мы рассматриваем множество новых объектов, эти объекты сами по себе являются множествами, но элементы в этих «маленьких» множествах мы не отличаем друг от друга, потому что нам так удобно. Таким образом, мы уже давно работаем с классами эквивалентности.

Рассмотрим некоторый граф. Перенумеруем его вершины и нарисуем такую табличку: в заголовках столбцов и строк напишем номера вершин, и будем ставить единичку в клетке таблицы (i, j), если вершины с номерами i и j соединены ребром, и нолик в противном случае. Такая таблица называется *матрицей смежности* графа.

Можно ли по матрице смежности восстановить граф? Поскольку у изоморфных графов такие матрицы совпадают (с точностью до перестановки одноимённых строк и столбцов), мы можем быть уверены только в том, что нарисуем граф, изоморфный первоначальному. Класс эквивалентности, порождаемый отношением изоморфизма, полностью задаётся матрицей смежности. Множество классов эквивалентности — это множество графов, определённых с точностью до изоморфизма. Нам часто приходится работать с такими графами при решении задач, в которых нам важно только, какие вершины с какими соединены, а вот каким образом соединены, не важно.

Рассмотрим множество плоских графов. На этом множестве задано отношение изоморфизма. У каждого плоского графа определены вершины, рёбра и грани. Рассмотрим теперь множество классов эквивалентности. Для элементов этого множества определены понятия вершин и рёбер.

Упражнение. Приведите пример изоморфных плоских графов, у которых будут разные грани.

Таким образом, для класса изоморфных графов нельзя определить понятие грани! Однако, по теореме Эйлера, у всех представителей этого класса будет одно и то же количество граней, поскольку величина $P - B + 2$ для них одинакова. То есть при переходе к новому множеству некоторые свойства элементов переносятся на новые элементы-классы, а некоторые нет.

Определение. *Направленным отрезком* называется отрезок на плоскости, для которого определено, что одна из его конечных точек является началом, а другая концом. Направленные отрезки называются *равными*, если их можно совместить параллельным переносом.

Задача 2. а) Докажите, что равенство направленных отрезков является отношением эквивалентности.

Определение. Класс эквивалентности, порождаемый отношением равенства направленных отрезков, называется *вектором.*

При переходе к множеству новых объектов многие свойства направленных отрезков сохраняются. В частности, разности координат конца и начала не зависят от представителя класса эквивалентности, их называют *координатами вектора.*

Для векторов можно определить такую операцию: возьмём произвольный представитель одного класса, представитель второго класса выберем так, чтобы его начало совпадало с концом первого. Рассмотрим направленный отрезок, началом которого является начало первого отрезка, а концом - конец второго отрезка. Класс, порождаемый этим направленным отрезком, будем называть *суммой* векторов, а операцию — *сложением векторов.* Почему именно так? Потому что, например, координаты нового вектора являются суммами соответствующих координат старых векторов (докажите).

Мы создали новое множество, и определили на нём операцию — это наш произвол. Необходимо, во-первых, доказать корректность этой операции:

Задача 2. б) Докажите, что определение суммы векторов корректно, то есть, если $x, x' \in [x]$, $y, y' \in [y]$, то $[x + y]$ совпадает с $[x' + y']$.

Во-вторых, мы сами придумали такую операцию и назвали её суммой. Если мы хотим пользоваться этой операцией так же, как суммой, определённой на числах, мы обязательно должны проверить, что все свойства суммы, которые выполняются для чисел, справедливы и для векторов.

Заметим, что точно такую же операцию нельзя определить на направленных отрезках (по крайней мере на всех). То есть операция, которую мы вводим на множестве новых объектов, «появляется вместе с этим множеством», её не было раньше.

В следующих задачах проверьте, является ли $\sim$ отношением эквивалентности на M и корректны ли следующие определения операций сложения $\oplus$ и умножения $\odot$ на множестве классов эквивалентности:

$$[x] \oplus [y] = [x + y],\ [x] \odot [y] = [x \cdot y].$$

Задача 3. $M = \mathbb{Z}$, фиксировано $m \in \mathbb{Z}$, $a \sim b \Leftrightarrow (a - b)$ делится на m.

Мы доказали, что сравнение целых чисел по некоторому модулю является отношением эквивалентности.

Определение. Классы эквивалентности, порождаемые отношением сравнения по модулю m, называются классами вычетов по модулю m, или просто *вычетами.*

Определение. Операции, определённые в задаче 3, называются *сложением* и *умножением* вычетов.

Задача 4. $M = \mathbb{Z}$, фиксировано $m \in \mathbb{Z}$, $a \sim b \Leftrightarrow (a + b)$ делится на m.

Задача 5. $M = \mathbb{R}[x]$ – множество многочленов от x с действительными коэффициентами, $f \sim g \Leftrightarrow$ у f и g одинаковые суммы коэффициентов.

Задача 6. $M = \mathbb{R}[x]$, фиксирован многочлен $\alpha \in \mathbb{R}[x]$, $f \sim g \Leftrightarrow (f - g)$ делится на α, то есть существует многочлен $\beta \in \mathbb{R}[x]$ такой, что $(f - g) = \alpha \cdot \beta$.