Геометрия Галилея – 3. Принцип двойственности (22/09/09)

19. а) M – середина стороны AC треугольника ABC, а точка N на стороне AB такова, что $NB = 2AN$. В каком отношении отрезок CN делится точкой пересечения с прямой BM?

б) Биссектриса угла B треугольника ABC пересекает прямую AC в точке X, а точка Y на прямой AB такова, что $\angle(CY, BC) = 2\angle(AC, CY)$. В каком отношении прямая XY делит угол BYC?

20. Проверьте, что преобразование, переводящее точку с координатами (t_0, x_0) в прямую с уравнением $x = t_0 t - x_0$, устанавливает между точками и прямыми плоскости Галилея соответствие двойственности.

21. Что двойственно многоугольнику, точке пересечения двух диагоналей многоугольника, параллелограмму, биссектрисе угла, медиане треугольника, трапеции, равнобедренной трапеции?

22. В четырёхугольнике $ABCD$ противоположные вершины A и C лежат на одной особой прямой. Докажите, что прямая BD и биссектрисы углов A и C пересекаются в одной точке. Какая ещё прямая проходит через ту же точку?

23. Решите задачи **8(в)** и **9(б)** с помощью принципа двойственности.

24. В четырёхугольнике $ABCD$ противоположные вершины A и C лежат на одной особой прямой. Докажите, что биссектрисы углов B и D пересекаются на этой же прямой.

Совет: для решения следующих задач полезно рассмотреть аналогичные утверждения в евклидовом случае.

25. Докажите, что угол между касательной и хордой цикла равен вписанному в цикл углу, опирающемуся на эту хорду.

26. Даны две параболы с параллельными осями, A и B – точки их пересечения, MN – хорда одной из парабол. Прямые AM и BN вторично пересекают другую параболу в точках P и Q. Докажите, что прямые PQ и MN параллельны.

27. Две параболы с параллельными осями пересекаются в точках A и B и касаются прямой в точках P и Q. Докажите, что отрезок PQ делится пополам прямой AB.

28. Через F_M будем обозначать фигуру, ограниченную данной параболой и касательными к ней, проведёнными из точки M. Докажите, что площадь фигуры F_M одинакова для всех точек M, лежащих на параболе, полученной из данной параллельным переносом вдоль оси.

29. Проведём к параболе три касательные, через середины сторон образованного ими треугольника проведём параболу с осью, параллельной оси первой параболы. Докажите, что эти две параболы будут касаться друг друга.