Задачи – 1.

В следующих задачах, если не оговорено противное, требуется доказать неравенство для положительных значений всех переменных, выяснить, будет ли верно неравенство, если разрешить переменным быть отрицательными, и найти все значения переменных, при которых достигается равенство.

1. $a^2 + ab + b^2 \geqslant 3(a + b - 1)$.

2. $(ab + bc + ca)^2 \geqslant 3abc(a + b + c)$.

3. $2^{\sqrt[12]{x}} + 2^{\sqrt[4]{x}} \geqslant 2 \cdot 2^{\sqrt[6]{x}}$.

4. $(a^4 + b^4 + c^4) \geqslant abc(a + b + c)$.

5. $(1 + \Delta)^\alpha \leqslant \alpha\Delta + 1$, при $\Delta \geqslant 0$, $1 \geqslant \alpha \geqslant 0$.

6. $\dfrac{x}{x^4 + y^2} + \dfrac{y}{x^2 + y^4} \leqslant \dfrac{1}{xy}$.

7. $\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \ldots + \dfrac{1}{3n+1} \geqslant 1$, n – натуральное.

8. Известно, что для положительных a, b, c верно: $ab + bc + ca > a + b + c$. Докажите, что $a + b + c > 3$.

9. $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \geqslant xy + yz + zx$, если $x + y + z = 3$.

10. $\dfrac{1}{15} < \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \dfrac{99}{100} < \dfrac{1}{10}$.

11. $\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \dfrac{99}{100} < \dfrac{1}{12}$.

12. $(1 + \dfrac{a_1^2}{a_2})(1 + \dfrac{a_2^2}{a_3}) \ldots (1 + \dfrac{a_n^2}{a_1}) \geqslant (1 + a_1)(1 + a_2) \ldots (1 + a_n)$.

13. $\sqrt{2\sqrt{3 \ldots \sqrt{(n-1)\sqrt{n}}}} < 3$, где n – натуральное.

14. $1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \cdots + \sqrt{n} \leqslant \dfrac{n\sqrt{n+1}}{\sqrt{2}}$, где n – натуральное.

15. $(1 + a_1)(2 + a_2) \ldots (n + a_n) \leqslant 2n!$, если $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 1$.

16. Найдите область значений функции $f(x, y, z) = \sqrt[3]{5 + x} + \sqrt[3]{6 + y} + \sqrt[3]{7 + z}$ при условии $x + y + z = 6$.

17. Рассматриваются всевозможные квадратичные функции $f(x) = ax^2 + bx + c$, такие, что $a < b$ $f(x) \geqslant 0$ для всех x. Какое наименьшее значение может принимать выражение $\dfrac{a+b+c}{b-a}$?

18. Рассматриваются такие наборы действительных чисел $(x_1, \ldots, x_{20})$, заключенных между 0 и 1, что $x_1 \cdot \ldots \cdot x_{20} = (1 - x_1) \cdot \ldots \cdot (1 - x_{20})$. Найдите среди этих наборов такой набор, для которого значение $x_1 \cdot \ldots \cdot x_{20}$ максимально.

19. Дан выпуклый пятиугольник $ABCDE$, известно, что $BA = AE = ED = 1$, $AB \perp CD$ и $BC \perp DE$. Докажите, что $BC + CD < 1$.

20. Высота прямоугольного треугольника, опущенная на гипотенузу, равна h. Какую наименьшую длину может иметь медиана, проведённая из вершины большего острого угла?

21. К окружности, вписанной в треугольник с периметром $2p$, проведена касательная, параллельная стороне этого треугольника. Найдите наибольшую возможную длину отрезка этой касательной, заключённого внутри треугольника.

22. Что больше: $300!$ или 100^{300}?

23. Есть несколько ящиков, в некоторых из них есть орехи. Известно, что в среднем в ящиках по 10 орехов, а среднее арифметическое квадратов чисел орехов в ящиках меньше 1000. Докажите, что по крайней мере 10 процентов ящиков – не пустые.

24. В квадратном коврике со стороной a есть несколько дырок, каждая площадью не больше 1. Известно, что любая прямая, параллельная (любой) стороне коврика, пересекает не более одной дырки. Какое наибольшее значение может принимать суммарная площадь дырок?

25. В ботаническом определителе растения описываются ста признаками. Каждый из признаков у растения может либо присутствовать, либо отсутствовать. Определитель считается хорошим, если любые два растения различаются более чем по половине признаков. Доказать, что в хорошем определителе не может быть описано более 50 растений.

26. Дано 8 действительных чисел: a, b, c, d, e, f, g, h. Доказать, что хотя бы одно из шести чисел $ac + bd$, $ae + bf$, $ag + bh$, $ce + df$, $cg + dh$, $eg + fh$ неотрицательно.