

**Графики функций. Асимптоты****1. Разбор домашнего задания**

При нахождении пределов рациональных функций в случае, когда в предельной точке и числитель, и знаменатель обращаются в нуль, как правило, необходимо разложить на множители числитель и знаменатель, и сократить дробь на множитель, который обращается в нуль (это допустимо, поскольку при вычислении предела используется только проколота окрестность, а в этой окрестности множители не обращаются в нуль и на них можно сокращать).

При нахождении предела функций с разностью корней необходимо домножить и разделить на сопряженное выражение, тогда получится множитель без корней, который обращается в нуль, и множитель с суммой корней, предел которого можно вычислить.

**2. Асимптоты графиков функций**

**Определение 1.** Прямая  $x = a$  называется вертикальной асимптотой графика функции  $y = f(x)$ , если  $f(x)$  является бесконечно большой при  $x \rightarrow a$  слева или справа.

Например:

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

асимптота  $x = 0$ , так как соответствующий предел равен  $+\infty$ .

$$f(x) = \frac{1}{x+1}$$

асимптота  $x = -1$ , так как пределы слева и справа равны  $\pm\infty$ .

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$$

асимптота  $x = 1$ , так как предел справа равен  $+\infty$ .

**Определение 2.** Прямая  $y = kx + b$  называется асимптотой графика функции  $y = f(x)$  при  $x \rightarrow \pm\infty$ , если  $f(x) = (kx + b) + \alpha(x)$ , где  $\alpha(x)$  — бесконечно мала при  $x \rightarrow \pm\infty$ . При  $k \neq 0$  эта асимптота называется наклонной, а при  $k = 0$  — горизонтальной.

Например:  $f(x) = \frac{3x^2+1}{x} = 3x + \frac{1}{x}$ . Асимптота  $y = 3x$  на  $\pm\infty$ .

$$g(x) = \frac{1-2|x|}{x} = \begin{cases} -2 + \frac{1}{x} & \text{при } x > 0; \\ 2 + \frac{1}{x} & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

Асимптоты:  $x = 0$ ,  $y = 2$ ,  $y = -2$ .

**Теорема** Прямая  $y = kx + b$  является асимптотой графика функции  $y = f(x)$  при  $x \rightarrow \pm\infty$  т. и т., когда  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k$  и  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx) = b$ .

Чтобы построить схематично график функции, необходимо найти пределы или односторонние пределы функции во всех «особых» точках, также найти пределы на бесконечности. Если это необходимо, найти пределы на бесконечности  $\frac{f(x)}{x}$  и  $f(x) - kx$ . Если функция в точке имеет числовой предел, несовпадающий со значением функции в этой точке, значит, это будет выколота точка. Если же не совпадают числовые односторонние пределы, в этой точке будет разрыв. Если же односторонние пределы равны  $\pm\infty$ , то в этой точке будет вертикальная асимптота. Нужно построить все асимптоты. Для горизонтальных и наклонных асимптот оценить, сверху или снизу к ним стремится график

функции. Нарисовать «хвосты графики» вдоль ассимптот и соединить плавными линиями. «Выколоть» точки, если это необходимо.

### 3. Домашнее задание

Найдите ассимптоты графиков функций, пределы на бесконечности и в особых точках, и постройте схематично графики функций:

1)  $f(x) = \frac{|x|}{x}$ ;

2)  $f(x) = \frac{6x^2+6x}{1-x^2}$ ;

3)  $f(x) = \frac{x^4-1}{x^3+6}$ ;

4)  $f(x) = \frac{x^2-1}{|x+1|}$ ;

5)  $f(x) = \frac{4x^2+x-5}{2x^2-x-1}$ ;

6)  $f(x) = \frac{2x^3+15}{x^2-6x-7}$ ;

7) Докажите, что не существует  $\lim_{x \rightarrow k} [x]$ , где  $k \in \mathbb{Z}$ .

8) Саакян 1357, 1358, 1359, 1360, 1361.

9) Найдите  $\lim_{n \rightarrow \infty} S(2^n)$ , где  $S(x)$  — сумма цифр в десятичной записи числа  $x$ .

### 4. Разбор домашнего задания.

### 5. Контрольная работа (45 мин)

I вариант

1. Пользуясь определением предела функции по Коши, докажите, что  $\lim_{x \rightarrow -2} (4x + 3) = -5$ .

2. Укажите область определения функции

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-3x}{4 - |x|} & \text{при } x < -5; \\ \frac{2|x| + 5}{x + 6} & \text{при } x \geq -5 \end{cases}$$

и найдите её пределы при  $x \rightarrow \pm\infty$ .

Вычислите:

3.  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3+4x^2+6x+3}{2x^2+3x+1}$ ;

4.  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-4}-1}{\sqrt{2x+6}-4}$ ;

5.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{(x-1)^2} \right)$ .

6. Найдите ассимптоты графика функции  $g(x) = \frac{x^2-2x}{x^2+x-6}$  и постройте схематично этот график.

7. Приведите пример функции, заданной формулой, которая при  $x \rightarrow +\infty$  имеет наклонную ассимптоту, а при  $x \rightarrow -\infty$  имеет горизонтальную ассимптоту.