Уроки №60 09.02.10

Бесконечный числовой ряд и сумма ряда

---

1. Определения

***Определение* 1.** Пусть (x_n) — числовая последовательность, тогда

1) $\forall n \in \mathbb{N}$ $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$ называется её частичной суммой, а последовательность (S_n) — последовательностью частичных сумм.

2) $\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ называется бесконечным числовым рядом этой последовательности.

3) Если этот предел существует и равен числу S, то ряд называется сходящимся, а S — его суммой. В противном случае ряд называется расходящимся.

2. Примеры

1) Сходится или расходится ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty}(2i-1) = 1+3+5+\ldots$? Частичная сумма этого ряда $S_n = n^2$, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, поэтому ряд расходится. Вообще, частичные суммы любой арифмитической прогрессии $\frac{(2a_1+(n-1)d)n}{2}$ стремятся либо к $+\infty$, либо к $-\infty$, поэтому соответстующий ряд будет расходящимся.

2) Вычислим $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^i = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots$. $S_n = 1-\left(\frac{1}{2}\right)^n \to 1$, поэтому ряд сходится к единице. Вообще любой бесконечно убывающей геометрической прогрессии соотвествует сходящийся ряд, поскольку $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{b_1}{1-q}$, а вот для возрастающих геометрических прогрессий это неверно по той же причине.

3) Любую периодическую десятичную дробь можно рассматривать как сумму бесконечного сходящегося ряда, суммой которого является рациональное число, например,

$$0,333\ldots = 0,3+0,03+\ldots = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{3}{10^i} = \frac{1}{3}.$$

4) $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i}$ — гармонический ряд (каждый его член, начиная со второго, равен среднему гармоническому двух соседних). Одно из самых знаменитых утверждений теории рядов — доказательство, что он расходится!

5) $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^{i-1}}{2i-1} = 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots$. Как вы думаете, сходится или расходится этот ряд? Оказывается, сходится, причем его сумма равна $\frac{\pi}{4}$!

6) Ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty}(-1)^{i-1} = 1-1+1-1+\ldots$ — расходящийся, поскольку его частичные суммы не имеют предела.

Желающие могут продолжить изучение рядов, используя литературу по математическому анализу. Нам же понятие ряда и его суммы позволит вычислять некоторые бесконечные суммы.

3. Решение задач

Вычислить:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i-1}}{2^{i-1}}}{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i}}{3^{i}}} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \left(-\frac{1}{2}\right)^{i-1}}{\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \left(-\frac{1}{3}\right)^{i}} = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^{i-1}}{\sum\limits_{i=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^{i}} = \dfrac{\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}{\frac{-\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}}} = -\dfrac{8}{3};$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} 3\cdot 2^{i-1}}{5\cdot 2^{n+1}+3} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3(2^n-1)}{5\cdot 2^{n+1}+3} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3-\frac{3}{2^n}}{10+\frac{3}{2^n}} = 0,3;$

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(3i-2)}{2n+1} - \dfrac{3n+1}{4} \right) = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n(3n-1)}{2(2n+1) - \frac{3n+1}{4}} \right) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{-7n-1}{8n+4} = -\dfrac{7}{8};$

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(4i-2)^2 - \sum\limits_{i=1}^{n}(4i)^2}{4n^2+3n+4} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{-2\sum\limits_{i=1}^{n}(8i-2)}{4n^2+3n+4} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{-8n^2-4n}{4n^2+3n+4} = -2;$

5) $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \dfrac{a}{i(i+1)}$, где $a\in\mathbb{R}, \ldots = a\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right) = a.$

4. <u>Домашнее задание</u>

Вычислить:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sum\limits_{i=1}^{n} \left(\sqrt{3}\right)^{i-1} \cdot 3^{\frac{2-n^2}{2n}} \right);$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(2i+2)^2 - \sum\limits_{i=1}^{n}(2i+3)^2}{4n-6n^2};$

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sum\limits_{i=1}^{n} 2^{1-i} \cdot \dfrac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n} \right);$

4) $Lim \left(\dfrac{1}{\sqrt{n}} \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{2i-1}+\sqrt{2i+1}} \right);$

5) $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \dfrac{10}{(100i-99)(100i+1)};$

6) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} i^3}{\sum\limits_{i=1}^{n} i^2} - \dfrac{3n^2-1}{4n+2} \right).$

Ответы: 1) $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$; 2) $\frac{1}{3}$; 3) 6; 4) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 5) 0, 1; 6) 0, 75.