Уроки №35-36 08.12.09

Показательная и логарифмическая функция

---

1. Степень с натуральным показателем

Определение:

$$a^n := 1 \cdot \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{n}, \qquad a \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N} \tag{1}$$

Свойства:

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y; \tag{2}$$

$$(a^x)^y = a^{xy}. \tag{3}$$

Неравенство Бернулли:

$$(1+x)^n > 1 + nx, \qquad x > -1,\ n \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \tag{4}$$

2. Степень с целым показателем

Пусть для $a \in \mathbb{R}$, $x, y \in \mathbb{Z}$ выполнены свойства 2 и 3. Докажите, что

$$a^0 = 1, \qquad a \in \mathbb{R}; \tag{5}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \qquad a \in \mathbb{R},\ a \neq 0,\ n \in \mathbb{N}. \tag{6}$$

Эти равенства принимаются за определение степени с целым показателем.

Свойства ($a, b \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$, $x, y \in \mathbb{Z}$):

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y; \tag{7}$$

$$(a^x)^y = a^{xy}; \tag{8}$$

$$a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}; \tag{9}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{a^x}{b^x}; \tag{10}$$

$$x = y \Leftrightarrow a^x = a^y, \qquad a \neq 1; \tag{11}$$

$$a = b \Leftrightarrow a^x = b^x, \qquad x \neq 0; \tag{12}$$

$$a^x > 0; \tag{13}$$

$$x > y \Leftrightarrow a^x > a^y, \qquad a > 1; \tag{14}$$

$$x > y \Leftrightarrow a^x < a^y, \qquad 0 < a < 1; \tag{15}$$

$$a > 1 \Leftrightarrow a^x > 1, \qquad x > 0; \tag{16}$$

$$a > b \Leftrightarrow a^x > b^x, \qquad x > 0; \tag{17}$$

$$a > b \Leftrightarrow a^x < b^x, \qquad x < 0. \tag{18}$$

3. Арифметический корень

Арифметическим корнем степени $n \in \mathbb{N}$ из числа $a > 0$ называется такое число $\sqrt[n]{a}$, что

$$\sqrt[n]{a} > 0; \tag{19}$$
$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a. \tag{20}$$

Аксиома Дедекинда:
Если множества $A, B \subset \mathbb{R}$ удовлетворяют следующим двум условиям:

1. $\forall a \in A, \forall b \in B$ *выполняется неравенство* $a \leqslant b$;
2. $\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A, b \in B \mid b - a < \varepsilon$;

то существует и единственно такое число c, что $a \leqslant c \leqslant b$ для всех $a \in A$ и $b \in B$.
Теорема 1: *Арифметический корень степени $n \in \mathbb{N}$ из числа $a > 0$ существует и единственен.*

Свойства:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[k]{a} = \sqrt[nk]{a^{n+k}}; \tag{21}$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a^{k-n}}; \tag{22}$$

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}; \tag{23}$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}; \tag{24}$$

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}; \tag{25}$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[kn]{a}; \tag{26}$$

$$\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}; \tag{27}$$

$$\sqrt[n]{a^{nk}} = a^k. \tag{28}$$

4. Степень с рациональным показателем
Пусть для $a \in \mathbb{R}$ и всех рациональных показателей выполнены свойства 2 и 3. Докажите, что

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, \qquad n \in \mathbb{N},\ m \in \mathbb{Z}. \tag{29}$$

Это равенство принимается за определение степени с рациональным показателем.
Теорема 2. *Значение степени с рациональным показателем не зависит от представления показателя в виде дроби.*

Свойства ($a, b \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$, $x, y \in \mathbb{Q}$):

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y; \tag{30}$$

$$(a^x)^y = a^{xy}; \tag{31}$$

$$a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}; \tag{32}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{a^x}{b^x}; \tag{33}$$

$$a = b \Leftrightarrow a^x = b^x, \qquad x \neq 0; \tag{34}$$

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}; \tag{35}$$

$$a^x > 0; \tag{36}$$

$$x > y \Leftrightarrow a^x > a^y, \qquad a > 1; \tag{37}$$

$$x > y \Leftrightarrow a^x < a^y, \qquad 0 < a < 1; \tag{38}$$

$$a > 1 \Leftrightarrow a^x > 1, \qquad x > 0; \tag{39}$$

$$a > b \Leftrightarrow a^x > b^x, \qquad x > 0; \tag{40}$$

$$a > b \Leftrightarrow a^x < b^x, \qquad x < 0; \tag{41}$$

$$\forall a > 1\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \mid\ a^\delta < 1 + \varepsilon. \tag{42}$$

5. Показательная функция

Пусть $a > 0$ — фиксированное число. Функция $y = a^x$ была определена для всех $x \in \mathbb{Q}$. Нужно доопределить эту функцию на всей числовой прямой так, чтобы выполнялись свойства 30-41.

Теорема 3. *Пусть $a > 1$. Для любого $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ существует единственное число y такое, что*

$$a^p < y < a^r,$$

для всех рациональных p и r таких, что $p < x < r$.

Если $a > 1$, определим $y = a^x$ при $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ как y из теоремы 3. Если $0 < a < 1$, положим

$$a^x := \left(\frac{1}{a}\right)^{-x}.$$

Полученная таким образом функция называется *показательной функцией.*
График функции:

Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке $x_0 \in D(f)$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \;\; | \;\; |x - x_0| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Функция $f(x)$ называется непрерывной на множестве $M \subset D(f)$, если она непрерывна в каждой точке множества M.

Теорема 4. Показательная функция монотонна и непрерывна на всей числовой прямой.

Свойства ($a, b \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$, $x, y \in \mathbb{R}$):

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y; \tag{43}$$

$$(a^x)^y = a^{xy}; \tag{44}$$

$$a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}; \tag{45}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{a^x}{b^x}; \tag{46}$$

$$a = b \Leftrightarrow a^x = b^x, \qquad x \neq 0; \tag{47}$$

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}; \tag{48}$$

$$a^x > 0; \tag{49}$$

$$x > y \Leftrightarrow a^x > a^y, \qquad a > 1; \tag{50}$$

$$x > y \Leftrightarrow a^x < a^y, \qquad 0 < a < 1; \tag{51}$$

$$a > 1 \Leftrightarrow a^x > 1, \qquad x > 0; \tag{52}$$

$$a > b \Leftrightarrow a^x > b^x, \qquad x > 0; \tag{53}$$

$$a > b \Leftrightarrow a^x < b^x, \qquad x < 0. \tag{54}$$

6. Логарифмическая функция.
При $a \neq 1$ функция $y(x)$, обратная к показательной, называется *логарифмической функцией.* $D(y) = (0; +\infty)$, $E(y) = \mathbb{R}$. Функция является монотонной и непрерывной на всей области определения. График логарифмической функции симметричен графику показательной функции относительно прямой $y = x$:

Логарифм числа $b > 0$ по основанию $a > 0$, $a \neq 1$ — это такое число $\log_a b$, что

$$a^{\log_a b} = b. \tag{55}$$

(*Основное логарифмическое тождество*)
Свойства:

$$\log_a 1 = 0; \tag{56}$$

$$\log_a a = 1; \tag{57}$$

$$\log_a bc = \log_a b + \log_a c; \tag{58}$$

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c; \tag{59}$$

$$\log_a b^c = c \log_a b; \tag{60}$$

$$\log_{a^c} b = \frac{1}{c}\log_a b; \tag{61}$$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}; \tag{62}$$

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}; \tag{63}$$

$$b > c > 0 \Leftrightarrow \log_a b > \log_a c, \qquad a > 1; \tag{64}$$

$$b > c > 0 \Leftrightarrow \log_a b < \log_a c, \qquad 0 < a < 1. \tag{65}$$

7. Разбор задачи с прошлого урока
Что больше, $\log_{10} 11$ или $\log_9 10$?
I способ: вычесть из каждого единицу, представить, как логарифм от дроби, и сравнить каждое с логарифмом $(1 + \frac{1}{10})$ по основанию 9.
II способ: рассмотреть корень из частного и использовать неравенство Коши (можно рассмотреть решение в общем виде).
8. Домашнее задание

1. Сравните $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{80}$ и $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{15+\sqrt{2}}$;
2. Вычислите $\log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \log_5 4 \cdot \log_6 5 \cdot \log_7 6 \cdot \log_8 7$;
3. Сравните $\log_{17} 19$ и $\log_{19} 20$;
4. Сравните $\log_7 10$ и $\log_{11} 13$.