Сколько точек на плоскости?

Теория и разминка.

На плоскости, как известно, бесконечно много точек. Некоторые множества точек называются прямыми, и прямых тоже бесконечно много. Нас будут, однако, интересовать маленькие, "игрушечные" плоскости, где всего этого только конечное число.

Пусть выбрано конечное множество, элементы которого называются **точками**. *Пусть некоторые его подмножества называются* **прямыми**, *причём соблюдены следующие три свойства (аксиомы):*

A1. Существуют три точки, не лежащие на одной прямой.

A2. Для любых двух различных точек существует ровно одна прямая, содержащая их.

A3. Для любой точки, не лежащей на данной прямой, существует ровно одна прямая, проходящая через эту точку и параллельная данной прямой.

При выполнении этих аксиом множество называется (аффинной) плоскостью.

1) Придумайте плоскость из 4-х точек.

Аксиомы A1, A2, A3 выполнены и на обычной плоскости. Наличие данного примера показывает, что то, что на ней бесконечно много точек, не следует из этих аксиом.

2) Может ли на плоскости быть менее 4-х точек?

3) Может ли на плоскости быть ровно 5 точек?

Задачи:

4) а) (Задача Эйлера) 9 солдат стоят на плацу в форме каре 3×3. Могут ли они перестроиться так, чтобы любые два солдата, которые ранее стояли в одной колонне или в одной шеренге, теперь стояли бы в разных колоннах и разных шеренгах? б) Приведите пример плоскости из 9 точек.

5) Докажите, что на каждой прямой лежат как минимум две точки.

6) Докажите, что через каждую точку проходят как минимум три прямые.

7) Докажите, что две прямые, параллельные третьей, параллельны или совпадают.

8) Докажите, что в плоскости на любых двух прямых поровну точек.

Предыдущая задача позволяет ввести характеристику плоскости — число точек на одной прямой. Это число называется **порядком** *данной плоскости.*

9) Придумайте плоскость порядка 4.

10) Докажите, что через каждую точку плоскости проходит одинаковое число прямых.

11) Рассмотрим плоскость порядка k. а) Докажите, что каждой прямой параллельно ровно $k-1$ прямых. б) Докажите, что в этой плоскости ровно k^2 точек. в) Сколько в ней прямых?

12) Докажите, что если существует плоскость порядка $k > 2$, то для каре $k \times k$ задача Эйлера имеет решение.

13)* Докажите, что задача Эйлера для каре 6×6 (а именно для такого числа её сформулировал Эйлер) не имеет решения (а значит и плоскости порядка 6 не бывает).