

Треугольник Паскаля. Ещё несколько задач.

Задачи:

- 1) Найдите $C_n^0 + 2C_n^1 + 4C_n^2 + 8C_n^3 + \dots + 2^n C_n^n$.
 - 2) Соедините линией C_2^0 и C_1^1 . Проведите линии, параллельные этой через каждую крайнюю левую единицу. Сложите числа вдоль каждой линии. Что за суммы получились? Докажите найденное соотношение.
 - 3) Вокруг любого числа в треугольнике Паскаля, расположенного не у самого края, можно выделить шесть соседних чисел, расположенных в вершинах шестиугольника. Докажите, что произведение трёх чисел из этого шестиугольника (первого, третьего и пятого в порядке обхода) равно произведению остальных трёх.
 - 4)
 - а) Докажите, что все числа в строке треугольника Паскаля с номером 2^n , кроме двух крайних единиц, чётные.
 - б) Докажите, что все числа в строке треугольника Паскаля с номером $2^n - 1$ нечётные.
 - в) Докажите, что в строке треугольника Паскаля с номером $2^n - 2$ чётные и нечётные числа чередуются.
 - г) Определите, как расположены чётные и нечётные числа в треугольнике Паскаля.
 - 5) По аналогии с треугольником Паскаля определим гармонический треугольник Лейбница: $L_0^0 = 1$, $L_n^0 = L_n^n = \frac{1}{n+1}$, $L_n^k = L_{n+1}^k + L_{n+1}^{k+1}$. Постройте начало этого треугольника. Докажите, что $L_n^k \cdot C_n^k = \frac{1}{n+1}$.
-