Полуинвариант. Метод спуска.

Теория и разминка.

Многие задачи иногда допускают решение следующего вида. Рассматривается какой-либо процесс (заданный в условии задачи или специально придуманный решающим) и выделяется величина, принимающая натуральные значения и уменьшающаяся с каждым шагом этого процесса. Такая величина называется **полуинвариантом** *и в силу того, что натуральное число нельзя уменьшать бесконечно, мы приходим за некоторое число шагов к тривиальному случаю, который обычно легко рассматривается и даёт ответ либо доставляет противоречие. Этот способ решения называют* **методом спуска**. *Он известен с древности, однако часто его приписывают известному французскому математику XVII века Пьеру Ферма. Считается, что именно таким способом он рассчитывал доказать свою знаменитую теорему (Великая или Последняя теорема Ферма).*

1) Докажите, что не существует рационального числа, квадрат которого равен 2.

2) На доске написано несколько натуральных чисел. Разрешается взять два числа, не делящие друг друга, стереть их и записать вместо них их НОД и НОК. Можно ли проделывать эту процедуру бесконечно много раз?

3) Решите в натуральных числах уравнение $x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$.

Задачи:

4) На доске были написаны неотрицательные числа a, b, c, d. Их стёрли, а вместо них написали числа $a + b$, $b + c$, $c + d$ и $d + a$. С этими числами снова проделали такую процедуру и так далее. Через некоторое время на доске оказались те же числа, что и вначале. Найдите исходные числа.

5) Докажите, что уравнение $x^3 = 3y^3 + 9z^3$ не имеет решений в натуральных числах.

6) В колонию бактерий попадает вирус. Каждую секунду вирус уничтожает одну бактерию, после чего и бактерии и вирусы делятся надвое. Докажите, что колония рано или поздно будет уничтожена.

7) Найдите все целые решения уравнение $8x^4 + 4y^4 + 2z^4 = t^4$?

8) По окружности выписано несколько натуральных чисел. Лёша между каждыми двумя записывает их НОД, после чего исходные числа стирает. Он уверен, что несколькими такими операциями сделает все числа одинаковыми. Прав ли Лёша?

9) Докажите, что уравнение $6(a^2 + b^2) = c^2 + d^2$ не имеет решений в натуральных числах.

10) Останется ли в силе утверждение предыдущей задачи, если заменить в уравнении число 6 на а) 5 б) 7?

11) Есть 1543 гири, каждая из которых весит целое число граммов. Известно, что если отложить любую гирю, то оставшиеся можно разбить на две группы, равные и по количеству гирь и по общей массе. Докажите, что все гири весят одинаково.

12) В лесу живут 12 гномов, у каждого дом окрашен в белый или красный цвет. Каждый гном дружит с нечётным числом других гномов. В январе первый гном перекрашивает свой дом в цвет, в который окрашены дома большинства его друзей. В феврале так же поступает второй гном и так далее. Докажите, что наступит момент, после которого цвета домов перестанут меняться.

Следующее уравнение — одно из так называемых уравнений Пелля.

13) Решите в натуральных числах уравнение $x^2 - 2y^2 = 1$. (Подсказка: пусть пара $(a\,;\,b)$ — одно из решений. Тогда пара $(3a - 4b\,;\,3b - 2a)$ тоже является решением.)

14) На плоскости отмечено несколько точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Люба соединила некоторые точки прямолинейными отрезками. Оказалось, что некоторые отрезки пересекаются. Лера взялась соединить точки по-другому, сохранив количество отрезков и сделав их непересекающимися. Именно, Лера, заметив два пересекающихся отрезка AB и CD, стирает их и чертит отрезки AC и BD. Добьётся ли Лера своего?

15) На доске по кругу написаны попарно различные натуральные числа. Между каждыми двумя пишут их среднее арифметическое, а потом исходные числа стирают. Докажите, что при повторении такой процедуры рано или поздно на доске появится нецелое число.