Китайская теорема об остатках. Системы сравнений

Теория и разминка

В этом листке все числа по-прежнему целые.

1) Найдите 5 последовательных натуральных чисел, первое из которых делится на 2, второе — на 3, третье — на 5, четвертое — на 7, пятое — на 11.

Эту задачу удобно решать пошагово: найти сначала множество натуральных чисел, делящихся на 2 :=), из него выбрать множество пар соседних чисел, из которых первое делится на 2, а второе — на 3 и.т.д.

Условие задачи можно было записать в виде системы сравнений. Ее разрешимость следует из китайской теоремы об остатках (КТО). К сожалению, предложенное на предыдущем занятии доказательство этой теоремы неконструктивно: оно убеждает в существовании решения, но не помогает его найти. Конструктивно КТО можно доказать по индукции, аналогично решению задачи 1).

Аналогичный алгоритм помогает решать и системы сравнений по модулям, не являющимся попарно взаимно простыми. Но в этом случае может и не найтись чисел, удовлетворяющих системе.

2) В маленькую коробку помещается 6 пирожных, в среднюю — 8, а в большую — 15. Если кондитер разложит все имеющиеся пирожные в маленькие коробки, то останется 4 лишних, если в большие, то 7, а если в средние, то лишних пирожных не останется. Сколько пирожных может быть у кондитера, если известно, что их не больше 300?

---

3) Найдите все трехзначные числа, дающие при делении на 37 остаток 2, а при делении на 11 — остаток 5.

4) Решите систему сравнений:

а) $\begin{cases} a \equiv 1 \pmod 7 \\ a \equiv 2 \pmod 9 \\ a \equiv 3 \pmod{10} \\ a \equiv 4 \pmod{11} \end{cases}$ б) $\begin{cases} a \equiv 5 \pmod 6 \\ a \equiv 2 \pmod 9 \\ a \equiv 7 \pmod{10} \end{cases}$ в) $\begin{cases} a \equiv 1 \pmod 5 \\ a \equiv 7 \pmod 8 \\ a \equiv 5 \pmod{12} \end{cases}$

5) При каких целых n число $n^2 + 3n + 1$ кратно 55?

Указание. Конечно, задачу можно решить, рассмотрев все возможные остатки по модулю 55. Подумайте, как сократить перебор.

6) Генерал хочет построить для парада своих солдат в одинаковые квадратные каре (конечно, в каре должно быть более одного человека), но он не знает сколько солдат (от 0 до 4) находится в лазарете. Докажите, что у генерала может быть такое количество солдат, что он, независимо от заполнения лазарета, сумеет выполнить свое намерение.

Например, войско из 9 человек можно поставить в виде квадрата 3×3, а если один человек болен, то в виде двух квадратов 2×2.

Замечание. В исходной формулировке в лазарете могло находиться от 1 до 37 человек. Математически это не меняет задачу. А как согласуется такая формулировка с реальностью?

7) В китайской натурфилософии выделяются пять первоэлементов природы - дерево, огонь, металл, вода и земля, которым соответствуют пять цветов - синий (или зеленый), красный, белый, черный и желтый.

В восточном календаре с древних времен используется 12-летний животный цикл так, что каждому из 12 лет в цикле соответствует одно из животных. Кроме того, каждый год проходит под покровительством одной из стихий и окрашивается в один из цветов: годы, оканчивающиеся на 0 и 1 - годы металла (цвет белый); годы, оканчивающиеся на 2 и 3 - это годы воды (цвет черный); годы, оканчивающиеся на 4 и 5 - годы дерева (цвет синий); годы, оканчивающиеся на 6 и 7 - годы огня (цвет красный); годы, оканчивающиеся на 8 и 9 - годы земли (цвет желтый).

В 60-летнем календарном цикле каждое животное возникает 5 раз. С помощью китайской теоремы об остатках объясните, почему оно все 5 раз бывает разного цвета.