Метод математической индукции.

Теория и разминка.

В задачах часто приходится сталкиваться с неудобными из-за своей величины объектами: большими числами, фигурами произвольной формы и пр. Математическая индукция — прекрасный способ борьбы с этой трудностью. Мысленно задачу упрощают, уменьшая входящие в неё большие числа до тех пор, пока они не станут настолько маленькими, что задача будет решаться просто. Вместо одного общего утверждения появляется лестница утверждений, занумерованных натуральными числами. При этом в самом первом случае (называемом **базой** *индукции), утверждение мы доказывать умеем. Мы встали на первую ступеньку лестницы. Научимся делать* **шаг** *индукции — доказывать, что если мы дошли до k-ой ступеньки, то есть утверждение верно для всех случаев от 1 до k, то верно и следующее, $(k+1)$-е. Ясно, что научившись шагать на следующую ступеньку, мы покоряем эту лестницу — рано или поздно любое утверждение будет доказано. Обычно база (первая ступенька) даётся без труда, а вот сделать шаг (переход от ступенек 1, 2, ..., k к ступеньке с номером $k+1$) бывает сложно. Зато мы при этом достигаем поразительного эффекта — заменяем бесконечное число доказательств одним.*

1) Проговорите в явном виде доказательство для 5-ой ступеньки.

2) Докажите, что сумма первых n натуральных чисел есть $\frac{n(n+1)}{2}$.

3) Докажите, что если у вас есть много гирь весом 3 кг и 5 кг, вы можете взвесить любой предмет массы n кг, где n — натуральное число, большее 7.

Задачи:

4) Докажите, что сумма квадратов первых n натуральных чисел есть $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

5) Докажите, что квадрат можно разрезать на любое число квадратов, большее пяти.

6) Докажите, что сумма кубов первых n натуральных чисел есть квадрат суммы этих чисел.

7) В прямоугольнике $3 \times n$ (3 строки) расставлены фишки трёх цветов по n штук каждого цвета. Докажите, что переставляя фишки в строках, можно сделать так, чтобы в каждом столбце были фишки всех 3х цветов.

8) Докажите, что $2^n > n$.

9) Известно, что $x + \frac{1}{x}$ есть целое число. Докажите, что целым является также и $x^n + \frac{1}{x^n}$ для любого натурального n.

10) Кирилл придумал новую последовательность: $K_1 = 3$, $K_2 = 5$, $K_{n+2} = 3K_{n+1} - 2K_n$. Напишите несколько чисел Кирилла. Угадайте общую формулу и докажите её по индукции.

11) Знаете ли вы, что все лошади одной масти? Есть простое "доказательство" по индукции. База: одна лошадь очевидно одной масти сама с собой. Шаг: Пусть нам дана $(k+1)$ лошадь. Любые k лошадей одной масти. Значит первые k лошадей одной масти и все лошади, кроме 1-ой, тоже одной масти. А значит, они все одной масти. Где ошибка?

12) Докажите, что:

а) любое натуральное число можно представить в виде суммы нескольких различных членов последовательности Фибоначчи.

б) если не разрешить использовать в представлении из пункта а) двух соседних чисел Фибоначчи одновременно, то такое представление однозначно.

13) Из чисел 1, 2, 3,..., $2n$ ($n > 1$) выбрали $n+2$ числа и покрасили в синий цвет. Докажите, что найдётся синее число, равное сумме двух других синих чисел.