Триангуляция. Сумма углов многоугольника.

Разминка

Как известно, сумма углов треугольника равна 180°. *А четырёхугольника?*

1) Докажите, что сумма углов четырёхугольника равна 360°.

А что получится для пятиугольника, шестиугольника и так далее?

2) Рассмотрим такое рассуждение: "Пусть дан n-угольник. Соединим одну из его вершин с остальными, проведя из неё все диагонали. Диагоналей будет проведено $n-3$, потому что диагональ не проводится в саму эту вершину и в две соседние. Значит наш n-угольник разрежется на $n-2$ треугольника. Тогда сумма углов n-угольника равна $180^\circ \cdot (n-2)$". Правилен ли ответ? Правильно ли доказательство?

Попробуем спасти ситуацию.

3) Рассмотрим другое рассуждение: "Пусть дан n-угольник. Выберем внутри него точку и соединим её со всеми вершинами. Отрезков будет проведено n, поэтому наш n-угольник разрежется на n треугольника. Тогда сумма углов n-угольника будет равна сумме углов этих треугольников за вычетом углов с вершиной в дополнительной точке. Эти лишние углы дают в сумме 360°, поэтому имеем ответ: $180^\circ \cdot n - 360^\circ = 180^\circ \cdot (n-2)$". Правилен ли ответ? Правильно ли доказательство?

Чёрт... ничего не выходит. Оказывается, всё не так просто. Ну, ладно, поехали.

Задачи

4) В n-угольнике диагональ пересекает сторону. Для какого минимального n такое возможно?

5) Основная лемма: **В любом n-угольнике ($n>3$) найдётся диагональ, лежащая целиком внутри него.**

а) Докажите, что в любом n-угольнике найдётся угол, меньший развёрнутого. Для этого рассмотрите прямую, не пересекающую n-угольник. Начните перемещать прямую в сторону n-угольника параллельно самой себе...

б) Пусть мы нашли такой угол $\angle ABC$. Тогда либо AC искомая диагональ, либо внутри треугольника ABC есть другие вершины n-угольника. Докажите.

в) Продолжим доказательство: если такие вершины n-угольника внутри треугольника ABC есть, возьмём ту из них, которая лежит дальше всего от стороны AC. Пусть это вершина D. Докажите, что DB — искомая диагональ.

Лемма доказана.

6) Вспомогательная лемма:

а) Докажите, что в любом n-угольнике ($n>3$) найдётся диагональ, отрезающая от него треугольник. (Подсказка: примените лемму из предыдущей задачи несколько раз.)

б) Докажите, что таких диагоналей при $n>4$по крайней мере две.

в) Может ли их быть ровно две (для большого n)?

7) Докажите, что любой n-угольник можно разбить непересекающимися диагоналями на треугольники.

Такое разбиение называется **триангуляцией** *от лат. triangulum – треугольник.*

8) Докажите теорему: **Сумма углов n-угольника равна $180^\circ \cdot (n-2)$.**

9) В правильном n-угольнике все углы равны. Сколько существует таких n, для которых углы такого n-угольника выражаются целым числом градусов? Перечислите эти n.

10) Какое максимальное количество углов может быть у многоугольника, если у него все углы прямые, кроме двух?

Рассматривается триангуляция n-угольника, $n>3$. Обозначим за T_0 число треугольников, у которых ни одна сторона не является стороной исходного n-угольника, за T_1 число треугольников, у которых ровно одна сторона является стороной исходного n-угольника, за T_2 число треугольников, у которых ровно две стороны является сторонами исходного n-угольника.

11) Докажите, что $T_2 - T_0 = 2$.

12) n-угольник как-то триангулирован.

а) Каково может быть минимальное и максимальное значение T_0?

б) Каково может быть минимальное и максимальное значение T_1?

в) Каково может быть минимальное и максимальное значение T_2?

13) Сколько диагоналей проводится при триангуляции n-угольника?

14) Какое максимальное количество углов, больших развёрнутого, может иметь n-угольник?