

Вписанный угол: избранные теоремы

1. Докажите с помощью критериев вписанности четырехугольника, что высоты остроугольного треугольника пересекаются в одной точке.
2. Теорема Микеля о шести окружностях. Пусть четыре окружности пересекаются в точках A и A_1 , B и B_1 , C и C_1 , D и D_1 , как показано на рисунке. Докажите, что если точки A , B , C и D принадлежат одной окружности, то точки A_1 , B_1 , C_1 и D_1 – другой.
3. Теорема Помпею. Если точка M принадлежит окружности, описанной около равностороннего треугольника ABC , то один из отрезков AM , BM и CM равен сумме двух других.
4. Теорема Мансиона. Докажите, что отрезок, соединяющий центры вписанной и невписанной окружностей треугольника, делится описанной окружностью пополам.
5. **Теорема Штейнера-Лемуса**. Если две биссектрисы треугольника равны, то этот треугольник равнобедренный.
Указание: Докажите две леммы: 1) Если две хорды окружности стягивают различные острые углы с вершинами на этой окружности, то меньшему углу соответствует меньшая хорда. 2) В треугольнике с двумя различными углами меньший угол обладает большей биссектрисой.

Домашнее задание

6. К двум окружностям, пересекающимся в точках K и M , проведена общая касательная. Докажите, что если A и B – точки касания, то $\angle AMB + \angle АКВ = 180^\circ$.
7. Докажите, что высоты тупоугольного треугольника пересекаются в одной точке.
8. Постройте треугольник по точкам пересечения с описанной окружностью продолжений его высоты, медианы и биссектрисы, проведенных из одной вершины.
9. Пусть $ABCD$ — вписанный четырехугольник. Докажите, что центры вписанных окружностей треугольников ABD , ABC , $BСD$ и DAC являются вершинами прямоугольника.
10. В четырехугольнике $ABCD$ три стороны равны: $AB = BC = CD$. Биссектрисы углов A и D пересекаются в точке E , а диагонали AC и BD – в точке O . Докажите, что точки A , O , E и D принадлежат одной окружности.