

## Занятие 41 (19/03/2008)

### Графы: подсчёт числа рёбер

**8.1.** На 8 марта каждый из 10 мальчиков класса подарил по цветку 8 одноклассницам. Известно, что каждая девочка получила по 5 цветков. Сколько всего девочек в классе?

**8.2.** На окружности отмечены несколько синих и красных точек. Каждая синяя точка соединена отрезками с тремя красными точками, а каждая красная — с пятью синими.

а) Докажите, что число отрезков кратно 15.

б) Найдите число красных точек, если всего отмечено 120 точек.

**8.3.** На плоскости нарисованы прямые и окружности. Сколько всего окружностей, если а) каждая прямая пересекается с 4 окружностями, а каждая окружность — с 7 прямыми. Известно, что окружностей на 30 меньше, чем прямых.

б) известно, что 3 из этих прямых пересекаются каждая с 10 окружностями, остальные прямые — каждая с четырьмя окружностями. Каждая окружность пересекается с семью прямыми; прямых и окружностей поровну.

**Определение Граф** — это набор *вершин* (точек) и *рёбер* (отрезков) такой, что каждый отрезок соединяет ровно две вершины и не проходит через другие. *Двудольный граф* — это граф, вершины которого покрашены в два цвета, а рёбра могут соединять только пары точек разного цвета. *Степенью* вершины называется число выходящих из нее рёбер.

**Теорема о числе рёбер двудольного графа**

а) Если есть всего  $n$  белых вершин, и все они степени  $s$ , то всего в графе  $ns$  рёбер.

б) Число рёбер равно сумме степеней всех белых вершин (и равно сумме степеней всех чёрных вершин).

**8.4.** Нарисуйте двудольный граф, где

а) чёрные и белые вершины — это соответственно чёрные и белые клетки доски  $3 \times 3$ , а рёбра соответствуют возможным ходам коня.

б) чёрные вершины — грани тетраэдра, белые — рёбра тетраэдра, а рёбра графа соединяют вершину тетраэдра с гранями, которым она принадлежит.

**8.5.** У додекаэдра 12 пятиугольных граней, а из каждой вершины выходит ровно три ребра. Сколько в нем рёбер и сколько граней?

**8.6.** Сколько диагоналей в выпуклом 10-угольнике?

**8.7.** а) Могут ли 6 человек коснуться друг друга руками и ногами так, чтобы каждый из них касался ровно трёх других?

б) Тот же вопрос про 7 человек?

**Лемма о рукопожатиях.** Число вершин нечётной степени — чётно.

**8.8.** а) В классе 20 человек. На праздник каждый мальчик подарил каждой девочке по цветку. Какое наибольшее число цветков могло быть подарено?

б) Тот же вопрос, если в классе 21 человек.

**Теорема о максимуме числа рёбер двудольного графа**

а) В двудольном графе с  $2n$  вершинами не более  $n^2$  рёбер;

б) в двудольном графе с  $2n + 1$  вершинами не более  $n(n + 1)$  рёбер.

### Домашнее задание

**8.9.** а) Сколькими способами можно поставить на шахматной доске  $8 \times 8$  две одинаковые ладьи так, чтобы они не били друг друга?

б\*) Тот же вопрос про двух одинаковых королей.

**8.10.** На плоскости проведено  $n$  прямых. Каждая пересекается ровно с 77 другими. Найдите  $n$  (укажите все возможности).

**8.11.** \* Род Муромцевых (ныне, увы, прекратившийся) основали трое сыновей Ильи Муромца. Все мужчины в роду имели по трое детей, за исключением 7 мужчин, не оставивших потомства. Всего в роду было 1994 женщины. Сколько всего человек было в роду Муромцевых? (Роду принадлежали основатели, а также те и только те дети, чей отец тоже принадлежал роду)

**8.12.** \* Назовём человека нелюдимым, если у него не более 5 знакомых. Назовем человека чудачком, если все его знакомые — нелюдимые. Докажите, что чудачков не больше, чем нелюдимых.

**8.13.** \*\* Петя красит клетки шахматной доски по одной в зелёный цвет, и каждый раз вписывает в клетку число ее зелёных соседей (по углу или стороне). Какая сумма у него получится, когда он закрасит все клетки?

**8.14.** \*\* Агроном Цветочкин считает период из нескольких дней подряд удачным, если в нем нечётное число дней были дождливыми. Каково наибольшее число удачных периодов может случиться в июле? (Периоды могут пересекаться и даже входить друг в друга).