Занятие 16 (10/12/2007)
Делимость
(задачи XXX Уральского турнира юных математиков и не только)

4.1. Найдите остаток от деления числа 3^{2007} на 7.

4.2. На какую наибольшую степень двойки делится число $3^{2007} - 2007$?

4.3. Найдите НОД всех шестизначных палиндромов.

4.4. На доске написаны числа $1, 2, \ldots, 2008$. За один ход разрешается стереть несколько чисел и вместо них написать остаток от деления на 7 их суммы. После нескольких шагов осталось два числа, одно из которых 987. Найдите второе число.

4.5. Докажите, что при любом натуральном n число $(2^n - 1)^n - 3$ делится на $2^n - 3$.

4.6. Докажите, что существует 1000000 последовательных натуральных чисел, среди которых ровно пять квадратов простых чисел.

4.7. Какое наибольшее количество натуральных чисел, не превосходящих 1000, можно выбрать так, чтобы никакая сумма двух выбранных чисел не делилась на их разность?

4.8. Какое наибольшее значение может иметь наибольший общий делитель чисел n^2+20 и $(n+1)^2+20$?

4.9. Назовём пару натуральных чисел квадратной, если и их сумма, и их произведение являются точными квадратами. Докажите, что число 11 не входит ни в одну квадратную пару.

4.10. Генерал построил солдат в колонну по 4, но при этом солдат Иванов остался лишним. Тогда генерал построил солдат в колонну по 5. И снова Иванов остался лишним. Когда же и в колонне по 6 Иванов оказался лишним, генерал посулил ему наряд вне очереди, после чего в колонне по 7 Иванов нашел себе место и никого лишнего не осталось. Сколько солдат могло быть у генерала?

Занятия 16 и 17 (10/11/2007 и 12/11/2007)
Сравнения по модулю

Мы знаем, что остатки можно складывать, перемножать, возводить в степень. На чём основана арифметика остатков? Все эти правила легко доказываются раскрытием скобок для остатков. Что будет, если вместо остатков подставить другие числа?
4.11. Докажите, что $21^{2n} - 1$ делится на 11.

Попробуем не ограничиваться только остатками. Будем рассматривать систему вычетов, т. е. набор чисел, среди которых встречаются все остатки, причём каждый ровно по одному разу.
Изобразите на числовой прямой все числа, дающие остаток 3 при делении на 4. Обратите внимание на то, что соседние числа отличаются на 4. Будем считать числа с одинаковыми остатками условно равными и обозначать такое равенство тремя чёрточками: $7 \equiv 3 \pmod 4$.
Незнайка-ворчун умеет считать только до 4. Если он видит число, большее 4, то он сбивается, ворчит и начинает снова, с 1. Он не сможет отличить 7 от 3, а 3 от -1.
4.12. Докажите, что $30^{99} + 61^{100}$ делится на 31.

Это можно доказать разными способами: через Незнайку-ворчуна, умеющего считать только до 31, или через раскрытие скобок, или через изображение на числовой прямой.
4.13. Подумайте, как можно дать определение тому, что значит «два числа сравнимы между собой по модулю m».

4.14. Докажите, что $43^{101} + 23^{101}$ делится на 66.

Подсказка: 66 это ноль.

4.15. Докажите, что $a^n + b^n$ делится на $a + b$ при любом нечётном n.

4.16. Две соседки пошли на рынок. По возвращении оказалось, что обе купили глазированные сырки, причём первая купила на 2 сырка больше, но вторая покупала сырки на 20 коп. дороже. При этом первая заплатила на 6 р. 19 коп. больше. Докажите, что одну из соседок обсчитали.

***Определение* 1.** Будем говорить, что $a \equiv b \pmod{m}$, (*a сравнимо с b по модулю m*), если a и b имеют одинаковые остатки при делении на m.

***Определение* 2.** $a \equiv b \pmod{m}$, если разность $a - b$ делится на m.

4.17. Докажите эквивалентность этих определений.

4.18. Сформулируйте свойства сравнений: верные сравнения (по одному и тому же модулю) можно складывать, перемножать и возводить в степень. Докажите, пользуясь любым из определений.

4.19. Опишите все x, удовлетворяющие сравнению $2x \equiv 4 \pmod{6}$. *Подсказка: можно воспользоваться любой системой вычетов.*

4.20. Опишите все x, удовлетворяющие сравнению $111x \equiv 999 \pmod{555}$.

4.21. Сформулируйте свойство сравнений о делении всех трёх частей сравнения (включая модуль) на одно и то же целое число.

4.22. Опишите все x, удовлетворяющие сравнению $2x \equiv 4 \pmod{5}$.

4.23. Опишите все x, удовлетворяющие сравнению $333x \equiv 999 \pmod{5}$.

4.24. Сформулируйте свойство о делении обеих частей сравнения на одно и то же целое число, взаимно простое с модулем.

4.25. Докажите, что $1^n + 2^n + \ldots + (n-1)^n$ делится на n при любом нечётном $n \geqslant 0$.

4.26. Докажите, что среди любого 51 целого числа, найдутся по крайней мере два, квадраты которых дают одинаковые остатки при делении на 100.

4.27. Докажите, что $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ делится на 133 при любом натуральном n.

4.28. Докажите признак делимости на 11: Сумма цифр, стоящих на нечётных местах, минус сумма цифр, стоящих на чётных местах, делится на 11.

4.29. Попробуйте придумать и доказать признаки делимости на 7 и на 13, зная, что $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$.

Верно ли, что существует возможность сформулировать признак делимости на любое число?