

Занятие 2

Период последовательности

18,5. Вспомните, что такое периодическая дробь. Попробуйте сформулировать, что значит *периодическая последовательность*.

Определение. Последовательность называется *периодической с периодом T* , если для всех n , начиная с некоторого, выполняется условие $a_{n+T} = a_n$. Начало последовательности (до первого элемента, входящего в период) называется *предпериодом*. Стоит отметить, что если T период, то $2T, 3T$ — тоже периоды.

19. Каждое следующее число в последовательности целых чисел получается из предыдущего так: число возводится в квадрат, и из него вычеркиваются все цифры, кроме последних четырех. Докажите, что последовательность периодическая.

20. Каждый следующий элемент последовательности натуральных чисел равен последней цифре произведения двух предыдущих. Докажите, что а) эта последовательность периодична; б) её период не больше 26.

21. Докажите, что если T — длина наименьшего периода последовательности, то длина любого другого периода делится на T .

Определение. Суммой последовательностей $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ называется последовательность $\{c_n\}$, где $c_n = a_n + b_n$.

22. Докажите, что сумма двух периодических последовательностей периодична.

23. Складываются две последовательности с наименьшими периодами 3 и 4. Может ли длина наименьшего периода суммы быть а) 12; б) 24; в) 5; г) 6; д) 1; е) 4?

24. Пусть a — некоторое нечётное число. В последовательности $\{u_n\}$ натуральных чисел u_1 задано произвольно, а для остальных элементов выполняется соотношение:

$$u_{n+1} = \begin{cases} \frac{u_n}{2}, & \text{если } u_n \text{ чётно;} \\ u_n + a, & \text{если } u_n \text{ нечётно.} \end{cases}$$

Докажите, что последовательность периодична.

25. Найдите x_{1000} , если $x_1 = 4$, $x_2 = 6$ и при любом натуральном $n \geq 3$ x_n — наименьшее составное число, большее $(2x_{n-1} - x_{n-2})$.